
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01013806 3

LEÇONS NOUVELLES

SUR

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE

ET SES

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

23191 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

LEÇONS NOUVELLES

SUR

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE

ET SES

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES,

PAR

M. CH. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

OUVRAGE HONORÉ D'UNE SOUSCRIPTION DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TROISIÈME PARTIE.

QUESTIONS ANALYTIQUES CLASSIQUES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1897

AVERTISSEMENT DE LA TROISIÈME PARTIE.

Le lecteur voudra bien imputer à l'insuffisance de l'espace me restant encore disponible les omissions qu'il apercevra dans ce Volume et dans le suivant. Parmi les questions particulières auxquelles des places sont habituellement concédées dans les Traités d'Analyse infinitésimale, j'ai dû me restreindre à celles qu'un licencié doit forcément connaître s'il ne veut être taxé justement d'ignorance; j'ai mis leur exposition en harmonie avec les principes posés dans les deux premières Parties de mon Ouvrage, en m'efforçant d'améliorer leur ordonnance, de rendre les raisonnements tout à fait rigoureux et naturels.

Je crois y avoir réussi, dans une certaine mesure, pour la théorie des équations différentielles linéaires qui me paraît gagner beaucoup à porter de préférence sur les systèmes immédiats et à être appuyée directement sur les développements en séries. Il me semble surtout que ma méthode, pour arriver aux formules si remarquables de Cauchy dans le cas des coefficients constants, leur apporte une clarté qui leur avait toujours manqué et qui, maintenant, ne laisse plus rien à désirer. Je crois encore avoir éclairci sensiblement plus d'un point du Calcul des variations et avoir rendu très satisfaisante, au point de vue de la rigueur et de la simplicité, la théorie des intégrales multiples, limitée aux quantités réelles, comme l'indique le peu d'élévation du niveau général de ces *Leçons*.

D'autres améliorations portent sur des détails; je crois pouvoir citer : la décomposition générale des fractions rationnelles en fractions plus simples, faisant bien ressortir la véritable portée du procédé suivi pour éviter les imaginaires quand les facteurs linéaires du dénominateur ne sont pas tous réels (2); la théorie de la différentielle *binôme* rendue très expéditive (9-10); une nou-

velle méthode d'une très grande netteté pour intégrer quantité de différentielles exponentielles et circulaires (12-13); la rigueur rendue à la mise en œuvre des artifices typiques utilisés dans le calcul des intégrales définies (20-39); plusieurs perfectionnements apportés à l'exposition de la méthode de Jacobi pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles (71-73), ainsi qu'à celle des propriétés des intégrales complètes de Lagrange (77-80); des démonstrations nouvelles de propositions très importantes dans la théorie générale des équations différentielles totales (125) et dans celle des fonctions d'une seule variable (126).

A l'attention de ceux que les questions doctrinales intéressent, je me permettrai de signaler les considérations exposées dans les Additions I et II; si elles m'étaient venues plus tôt à l'esprit, elles m'auraient permis d'apporter des modifications, selon moi très avantageuses, à l'ordonnance et à l'assiette de mes principes généraux.

La question traitée dans l'Addition V me paraît encore offrir une assez grande importance, soit par son sujet même, soit parce que sa solution oppose une fois de plus la sûreté des théories analytiques, fondées sur l'olotropie habituelle des fonctions, au caractère vague et précaire, erroné quelquefois, des spéculations, des conjectures auxquelles cet appui a manqué.

J'ai éprouvé la satisfaction de voir s'accentuer encore et s'étendre à la deuxième Partie de mon Ouvrage la faveur avec laquelle la première avait été accueillie : j'en remercie sincèrement le public, et, de nouveau, j'offre l'expression de toute ma reconnaissance aux auteurs des articles si bienveillants qui, à deux reprises déjà, ont appelé son attention sur mon œuvre.



LEÇONS NOUVELLES

SUR

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE

ET SES

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

TROISIÈME PARTIE.

QUESTIONS ANALYTIQUES CLASSIQUES.

CHAPITRE I.

INTÉGRATION INDÉFINIE DES DIFFÉRENTIELLES COURANTES.

Différentielles rationnelles.

1. En appelant $R(x)$ une fonction rationnelle quelconque de x, le calcul de l'intégrale indéfinie $\int R(x)\,dx$ est un problème que nous avons résolu depuis longtemps par la décomposition de $R(x)$ exécutée au n° 52** [1]. A l'intégration, les monômes entiers donnent d'autres monômes entiers; les fractions simples, dont les degrés des dénominateurs excèdent 1, donnent d'autres fractions simples (215*, II, IV), et celles dont les dénominateurs sont du premier degré donnent des logarithmes (170**), (171**), (188**). Nous avons toutefois quelques observations additionnelles à faire

[1] Dans ce Volume, un numéro de renvoi visera la première Partie de l'Ouvrage, la deuxième, ou celle-ci, selon qu'il sera affecté d'un astérisque, de deux ou d'aucun.

dans le cas où *les coefficients de* $R(x)$ *étant réels, quelques-uns des infinis de cette fonction sont imaginaires.*

La décomposition de $R(x)$, donnant alors des termes imaginaires, rend imaginaire aussi la forme extérieure de l'intégrale indéfinie; mais comme celle-ci est néanmoins réelle pour toute valeur réelle de x (24**), il est possible de lui donner une autre forme sous laquelle sa réalité soit apparente. Cette transformation n'offre aucune difficulté, car, à cause de la réalité supposée aux coefficients de $R(x)$, les termes imaginaires provenant de sa décomposition sont de toute nécessité conjugués deux à deux (74*), ceux aussi, par suite, qui leur correspondent dans l'intégrale; il suffit donc de transformer convenablement les résultats de l'accouplement de ces derniers pour obtenir la forme voulue. La chose est évidente pour les fractions simples. Quant aux paires de logarithmes, chacune d'elles est de la forme

$$(A' + iA'')l(x - \alpha' - i\alpha'') + (A' - iA'')l(x - \alpha' + i\alpha''),$$

où sont mis en évidence les éléments α', α'' et A' et A'' de l'infini et du résidu correspondant. Or cette somme se transforme immédiatement en

$$A' l[(x - \alpha')^2 + \alpha''^2] + iA''[l(x - \alpha' - i\alpha'') - l(x - \alpha' + i\alpha'')],$$

et la dernière partie de cette expression peut s'écrire

$$-2A''\left[\frac{1}{2i}\, l\left(\frac{x - \alpha'}{\alpha''} - i\right) - \frac{1}{2i}\, l\left(\frac{x - \alpha'}{\alpha''} + i\right)\right] = -2A'' \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x - \alpha'}{\alpha''}\right),$$

à une quantité constante près (185**, III), (218**).

2. A l'époque où l'emploi des quantités imaginaires était restreint aux questions purement algébriques, on transformait la différentielle elle-même en termes réels se prêtant à l'intégration, et, quoique ce procédé soit moins net et plus laborieux, nous devons l'exposer pour nous conformer à l'usage. Il a pour base un cas particulier du théorème suivant.

En posant

$$R(x) = \frac{F(x)}{f(x)},$$

où $F(x)$, $f(x)$ *sont deux polynômes entiers premiers entre*

eux, puis

$$f(x) = [P(x)]^{\varpi}[Q(x)]^{\chi}\ldots[T(x)]^{\tau},$$

où $\varpi, \chi, \ldots, \tau$ *sont des exposants entiers positifs, où*

(1) $$P(x), \quad Q(x), \quad \ldots, \quad T(x)$$

sont des polynômes entiers, dont deux quelconques sont premiers entre eux, la fraction rationnelle $R(x)$ *est décomposable, et cela d'une seule manière, en une partie entière* $E(x)$ *et des fractions plus simples, ayant pour dénominateurs, des puissances des polynômes* (1) *marquées par des exposants non supérieurs à* $\varpi, \chi, \ldots, \tau$ *respectivement, pour numérateurs, des polynômes entiers en* x, *dont les degrés sont inférieurs à ceux des mêmes polynômes* (1) *respectivement.*

I. Si l'on nomme $f_1(x)$ le quotient de la division de $f(x)$ par $[P(x)]^{\varpi}$, lequel est premier à $P(x)$ par hypothèse, et $A_0(x)$ quelque polynôme de degré inférieur à celui de $P(x)$, l'identité à réaliser,

(2) $$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{[P(x)]^{\varpi}f_1(x)} = \left\{\frac{A_0(x)}{[P(x)]^{\varpi}} + \ldots\right\} + E(x),$$

entraîne évidemment pour la différence

$$\frac{F(x)}{[P(x)]^{\varpi}f_1(x)} - \frac{A_0(x)}{[P(x)]^{\varpi}} = \frac{F(x) - f_1(x)A_0(x)}{[P(x)]^{\varpi}f_1(x)},$$

la propriété de se réduire à une fraction rationnelle (irréductible ou non) ayant pour dénominateur le produit de $f_1(x)$ par une puissance de $P(x)$ dont l'exposant est $< \varpi$. Elle entraîne, par suite, pour le polynôme

(3) $$F(x) - f_1(x)A_0(x)$$

celle d'être divisible par $P(x)$, c'est-à-dire de s'annuler pour chaque zéro de $P(x)$, lui-même et toutes ses dérivées d'ordres inférieurs au degré de multiplicité de ce zéro.

Réciproquement, si l'on prend pour $A_0(x)$ un polynôme de degré inférieur à celui de $P(x)$ qui fasse acquérir cette propriété à la différence (3), elle sera divisible par quelque puissance de $P(x)$, moyennant quoi $R(x)$ sera décomposable en la fraction plus simple mise en évidence dans la relation (2) et en une autre

fonction rationnelle dont le dénominateur sera le quotient de $f(x)$ par cette puissance de $P(x)$. Ensuite, il n'y aura plus qu'à poursuivre la même décomposition sur cette nouvelle fonction et les subséquentes jusqu'à ce que le dénominateur ne soit plus divisible par $P(x)$, puis à y faire intervenir successivement $Q(x)$, ..., $T(x)$ au même titre que $P(x)$ antérieurement, pour amener la fonction rationnelle complémentaire à dégénérer en un simple polynôme entier $E(x)$.

II. Les équations de condition exprimant ainsi que la différence (3) admet les divers zéros de $P(x)$ aux mêmes degrés de multiplicité respectivement sont en nombre total M, degré effectif de $P(x)$. Et, comme par hypothèse aucun de ces zéros ne peut annuler $f_1(x)$, on voit facilement que pour chacun d'eux x_i de degré de multiplicité m_i, elles fournissent les valeurs de $A_0(x_i)$, $A'_0(x_i)$, ..., $A_0^{(m_i-1)}(x_i)$. Le polynôme $A_0(x)$ n'étant que de degré $M-1$, ses coefficients dépendent ainsi d'un système d'équations linéaires que nous savons être possible et déterminé (41*).

III. De là résultent à la fois, et la possibilité de la décomposition cherchée, et l'impossibilité de l'exécuter de plus d'une manière; car dans chaque phase de l'opération, le polynôme analogue à $A_0(x)$ est entièrement déterminé. Ce dernier point s'établirait facilement encore par un raisonnement analogue à celui du nº 40**.

3. Revenant maintenant à notre intégration, nous observerons que, les coefficients de $f(x)$ étant réels, ce polynôme est décomposable en un produit de puissances de facteurs deux à deux premiers entre eux, à coefficients réels, et des formes $(x-\alpha')^2+\alpha''^2$, $x-\beta$ (où $\alpha''\neq 0$); que $R(x)$, par suite (2), est décomposable en une partie entière, évidemment réelle, en fractions simples proprement dites, réelles aussi, et en d'autres fractions de la forme

$$\frac{Ix+J}{[(x-\alpha')^2+\alpha''^2]^\mu}. \tag{4}$$

En outre les coefficients I, J sont nécessairement réels, car, pour en calculer la première paire par exemple, il faut, d'après

le numéro précédent, résoudre les équations simultanées

$$F(\alpha' \pm i\alpha'') - f_1(\alpha' \pm i\alpha'')[I(\alpha' \pm i\alpha'') + J] = 0,$$

équivalant à

$$\begin{cases} \alpha' I + J = H', \\ \alpha'' I \qquad = H'', \end{cases}$$

$H' \pm iH''$ représentant les valeurs de $\dfrac{F(x)}{f_1(x)}$ pour $x = \alpha' \pm i\alpha''$, qui sont conjuguées parce que les coefficients de $F(x)$ sont supposés réels aussi.

4. La partie entière de $R(x)$ et ses fractions simples ne donnant dans l'intégrale que des termes réels qui nous sont connus, il nous reste seulement à intégrer la fraction (4) (et toutes celles du même genre), ou bien, ce qui revient au même, les expressions

$$(5) \qquad \frac{2(x-\alpha')}{[(x-\alpha')^2 + \alpha''^2]^\mu},$$

$$(6) \qquad \frac{1}{\alpha''} \frac{1}{\left[1 + \left(\dfrac{x-\alpha'}{\alpha''}\right)^2\right]^\mu},$$

qui la reproduisent évidemment quand on en ajoute les produits par les constantes $\dfrac{I}{2}$, $\dfrac{I\alpha' + J}{\alpha''^{2\mu-1}}$.

I. Pour l'expression (5) on trouve immédiatement

$$\int \frac{2(x-\alpha')\,dx}{[(x-\alpha')^2 + \alpha''^2]^\mu} = \frac{1}{-\mu+1}[(x-\alpha')^2 + \alpha''^2]^{-\mu+1} + C$$

ou

$$\int \frac{2(x-\alpha')\,dx}{[(x-\alpha')^2 + \alpha''^2]^\mu} = l[(x-\alpha')^2 + \alpha''^2] + C,$$

selon qu'on a $\mu \gtreqless 1$.

II. En appelant ensuite t une nouvelle variable d'intégration, la substitution

$$(7) \qquad x = \alpha' + \alpha'' t, \qquad \text{d'où} \qquad dx = \alpha''\,dt,$$

change l'intégrale indéfinie de l'expression (6) en

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^\mu} \qquad (333^*)$$

que nous allons calculer.

1° Si $\mu = 1$, il vient à vue

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tang} t + C \qquad (219^{**}). \tag{8}$$

2° Si $\mu > 1$, on écrira

$$\frac{1}{(1+t^2)^\mu} = \frac{1}{(1+t^2)^{\mu-1}} - \frac{t^2}{(1+t^2)^\mu},$$

d'où

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^\mu} = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{\mu-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^\mu}. \tag{9}$$

L'intégration par parties (270*) donne ensuite

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^\mu} = \frac{1}{2}\int t\,\frac{2t\,dt}{(1+t^2)^\mu} &= \frac{1}{2}\,t\left[\frac{1}{-\mu+1}\,\frac{1}{(1+t^2)^{\mu-1}}\right] \\ &\quad - \frac{1}{2}\,\frac{1}{-\mu+1}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{\mu-1}} \\ &= -\frac{t}{(2\mu-2)(1+t^2)^{\mu-1}} + \frac{1}{(2\mu-2)}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{\mu-1}},\end{aligned}$$

moyennant quoi la relation (9) devient

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^\mu} = \frac{t}{(2\mu-2)(1+t^2)^{\mu-1}} + \frac{2\mu-3}{2\mu-2}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{\mu-1}},$$

et l'intégrale cherchée est ainsi ramenée à un terme connu, accompagné d'une intégrale de même forme mais où l'exposant μ a diminué de 1. En employant donc $\mu - 1$ fois cette formule de réduction, on arrivera à l'intégrale (8) qui est connue.

3° La substitution inverse de (7), savoir

$$t = \frac{x-\alpha'}{\alpha''},$$

fournira ensuite l'intégrale indéfinie de l'expression (6).

Différentielles irrationnelles algébriques.

5. *Si a, b, c, d sont quatre constantes (de déterminant $\neq 0$), $m_1, m_2, \ldots$ des entiers quelconques (pouvant être supposés*

positifs), et F *une composante rationnelle, l'intégrale*

$$(1) \qquad \int \mathrm{F}\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{m_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{m_2}}, \dots\right] dx$$

est réductible, par une simple substitution rationnelle, à celle d'une différentielle qui est rationnelle aussi.

En appelant M le plus petit multiple commun des nombres m_1, m_2, ..., et t une nouvelle variable d'intégration, il suffit effectivement de poser

$$(2) \qquad \frac{ax+b}{cx+d} = t^{\mathrm{M}},$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad x = \rho(t), \qquad \text{d'où} \qquad dx = \rho'(t)\,dt,$$

$\rho(t)$ étant une certaine fonction rationnelle de t qui s'aperçoit immédiatement. Car l'intégrale (1) devient

$$\int \mathrm{F}\left[\rho(t), t^{\frac{\mathrm{M}}{m_1}}, t^{\frac{\mathrm{M}}{m_2}}, \dots\right] \rho'(t)\,dt \qquad (333^*),$$

où la fonction sous le signe $\int$ contient t d'une manière évidemment rationnelle, parce que $\frac{\mathrm{M}}{m_1}$, $\frac{\mathrm{M}}{m_2}$, ... sont des nombres entiers.

Celle-ci ayant été calculée par les moyens que nous connaissons (170**), (171**), (188**), (1 *et suiv.*), on revient à la proposée (1) par la substitution

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{\mathrm{M}}},$$

inverse de (2).

6. Depuis longtemps (227**) nous savons que l'intégrale

$$(4) \qquad \int \mathrm{F}\left(x, \sqrt{a+bx+cx^2}\right) dx,$$

où F est une composante rationnelle et $a+bx+cx^2$ un polynôme du deuxième degré à zéros simples, est réductible à celle d'une différentielle rationnelle par une substitution rationnelle du deuxième degré; nous savons, en outre, l'exprimer au moyen de fonctions algébriques et logarithmiques. Nous reviendrons à son calcul un instant toutefois pour indiquer comment on

peut éviter l'intrusion des imaginaires, quand les données sont réelles, ainsi que le radical pour les valeurs de x à considérer.

Le procédé classique consiste à employer, suivant les circonstances, l'une ou l'une des trois substitutions suivantes où t représente la nouvelle variable d'intégration et $\rho(t)$ une certaine fonction rationnelle de t qui dans chaque cas n'est pas illusoire et s'aperçoit immédiatement (333*).

I. On pose

$$a + bx + cx^2 = (t + \sqrt{c}x)^2,$$

c'est-à-dire

$$a + bx = t^2 + 2\sqrt{c}tx,$$

d'où

$$x = \rho(t), \qquad dx = \rho'(t)dt$$

et

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = t + \sqrt{c}\rho(t).$$

II. On pose

$$a + bx + cx^2 = (\sqrt{a} + tx)^2,$$

c'est-à-dire

$$b + cx = 2\sqrt{a}t + t^2x,$$

d'où

$$x = \rho(t), \qquad dx = \rho'(t)dt,$$

et

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = \sqrt{a} + t\rho(t).$$

III. En appelant x_1, x_2 les deux zéros du trinôme $a + bx + cx^2$, on pose

$$a + bx + cx^2 = c(x - x_1)(x - x_2) = (x - x_1)^2t^2,$$

c'est-à-dire

$$c(x - x_2) = (x - x_1)t^2,$$

d'où

$$x = \rho(t), \qquad dx = \rho'(t)dt,$$

et

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = [\rho(t) - x_1]t.$$

Maintenant, le but poursuivi est atteint par la substitution I (au moins) si c est positif, car alors $\sqrt{c}$ est réel; par la substitution II

(au moins) si a est positif, car $\sqrt{a}$ est alors réel. Quand enfin a, c sont deux quantités négatives (et quand le radical n'est pas imaginaire pour toute valeur réelle de x), les zéros du trinôme sont forcément réels, et la substitution III est certainement efficace.

La différentielle à intégrer ayant été rendue rationnelle avec une forme réelle, les calculs s'achèvent comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe précédent, et quand ils sont terminés, il ne reste plus qu'à inverser dans le résultat celle des substitutions précédentes d'où l'on est parti.

7. Mais il va sans dire qu'on arrive aussi bien à la forme réelle en étendant les considérations du n° 1 au développement, même d'apparence imaginaire, que fournit pour l'intégrale la méthode générale de réduction du n° 224**, combinée avec les expressions des intégrales réduites trouvées au n° 228**, II. Nous n'insisterons pas sur un point aussi secondaire, très facile au surplus, et nous noterons seulement deux formules de ce genre qui sont utiles dans certaines applications, savoir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2px+q}} = l(x+p+\sqrt{x^2+2px+q})+\text{C},$$

et

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2px+q}} = \arc\sin\left(\frac{x-p}{\sqrt{p^2+q}}\right)+\text{C},$$

où p, q sont deux quantités réelles quelconques donnant toutefois $p^2+q>0$ pour la seconde, sans quoi le radical serait imaginaire pour toute valeur réelle de x.

La première est fournie immédiatement par l'expression (26) de l'intégrale (24) du n° 228**, où l'on remplacera naturellement u, G, $a+b$, ab par x, 1, $-2p$, q.

Pour obtenir la seconde, nous substituerons dans la même expression x, -1, $2p$, $-q$ à u, G, $a+b$, ab et il viendra

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{i}\,l(x-p+\sqrt{x^2-2px-q})+\text{C}\\
&=\frac{1}{i}\,l\left[i\left(\frac{x-p}{\sqrt{p^2+q}}\right)+\sqrt{1-\left(\frac{x-p}{\sqrt{p^2+q}}\right)^2}\,\right]+\frac{1}{i}\,l\,\frac{\sqrt{p^2+q}}{i}+\text{C}\\
&=\arc\sin\left(\frac{x-p}{\sqrt{p^2+q}}\right)+\text{C}' \qquad (239^{**}).
\end{aligned}$$

8. L'intégrale

$$\int F(x, \sqrt{a + bx}, \sqrt{a' + b'x})\, dx,$$

où F est une composante rationnelle, se ramène immédiatement à la forme (4) par la substitution

$$x = \frac{t^2 - a'}{b'}, \qquad \text{d'où} \qquad dx = 2\,\frac{t}{b'}\,dt \qquad (333^*)$$

et

$$\sqrt{a' + b'x} = t, \qquad \sqrt{a + bx} = \sqrt{\left(a - \frac{ba'}{b'}\right) + \frac{b}{b'}\,t^2}.$$

9. En appelant a, b deux constantes inégales, et α, β deux exposants réels commensurables quelconques, l'intégrale de nature abélienne (169**)

$$\int (a + x)^{\alpha} (b + x)^{\beta}\, dx \tag{5}$$

renferme l'intégrale classique dont nous parlerons tout à l'heure (10, *inf.*) et nous la considérerons de préférence.

I. Elle est réductible à celle d'une différentielle rationnelle par la substitution indiquée au n° 5, partant *exprimable au moyen des fonctions algébriques et logarithmiques :*

1° *Quand l'exposant α est entier,* car alors la différentielle ne contient pas d'autre irrationnelle que le radical $(b + x)^{\beta}$ portant sur une fonction linéaire de x (*loc. cit.*);

2° *Quand β est entier* pour une cause semblable;

3° *Quand la somme $\alpha + \beta$ est un nombre entier,* car la différentielle écrite

$$(a + x)^{\alpha+\beta} \left(\frac{b + x}{a + x}\right)^{\beta} dx$$

ne contient d'autre irrationnelle qu'un radical portant sur la fonction rationnelle et du premier degré $\dfrac{b + x}{a + x}$ (*loc. cit.*).

II. *Dans tous les autres cas, l'intégrale* (5) *est réductible à des fonctions algébriques et à une autre de même forme dans laquelle chacun des exposants α, β a augmenté ou diminué d'autant d'unités qu'on le veut.*

L'intégration par parties (270*), exécutée en considérant le

second facteur comme une dérivée, donne d'abord

$$(6)\quad \begin{cases} \int (a+x)^{\alpha}(b+x)^{\beta}\,dx = \dfrac{(a+x)^{\alpha}(b+x)^{\beta+1}}{\beta+1} \\ \qquad\qquad - \dfrac{\alpha}{\beta+1}\int (a+x)^{\alpha-1}(b+x)^{\beta+1}dx. \end{cases}$$

En remplaçant ensuite dans l'intégrale complémentaire un facteur $b+x$ par $(b-a)+(a+x)$, des transformations évidentes conduisent à

$$(7)\quad \begin{cases} \int (a+x)^{\alpha}(b+x)^{\beta}\,dx = \dfrac{(a+x)^{\alpha}(b+x)^{\beta+1}}{\alpha+\beta+1} \\ \qquad\qquad - \dfrac{\alpha(b-a)}{\alpha+\beta+1}\int (a+x)^{\alpha-1}(b+x)^{\beta}\,dx. \end{cases}$$

Si maintenant on change α en $\alpha+1$, et si l'on résout cette formule par rapport à l'intégrale entrant dans son second membre, il vient

$$(8)\quad \begin{cases} \int (a+x)^{\alpha}(b+x)^{\beta}\,dx = \dfrac{(a+x)^{\alpha+1}(b+x)^{\beta+1}}{(\alpha+1)(b-a)} \\ \qquad\qquad - \dfrac{\alpha+\beta+2}{(\alpha+1)(b-a)}\int (a+x)^{\alpha+1}(b+x)^{\beta}\,dx. \end{cases}$$

Les formules (6), (7), (8) ne sont jamais illusoires, parce que aucun entier ne pouvant se trouver parmi α, β, $\alpha+\beta$, les quantités $\alpha+1$, $\beta+1$, $\alpha+\beta+1$ sont, comme $b-a$, toutes $\neq 0$. L'emploi répété des deux dernières permet, sans changer β, de retrancher à α ou de lui ajouter autant d'unités qu'on le veut. Celles qui s'en déduisent par la permutation simultanée de a avec b et de α avec β permettent de modifier semblablement β sans toucher à α, d'où la possibilité de la transformation que nous avions en vue.

On pourra par exemple ramener α, β à tomber tous deux dans l'intervalle 0, 1.

Quand α et β sont de signes contraires, la diminution de leurs valeurs numériques peut, au moins pendant quelque temps, être opérée simultanément, plus rapidement par suite, à l'aide de la formule (6), ou sinon de ce qu'elle devient quand on y permute a avec b et α avec β.

III. Dans les cas d'*intégrabilité pratique* signalés au début (I),

les formules précédentes peuvent être ou devenir illusoires. Cette éventualité ne les empêche pas de procurer des réductions qui facilitent l'intégration.

Si par exemple α est un entier positif, la formule (7), qui n'est jamais illusoire quand β est une fraction, conduit jusqu'à l'intégrale

$$\int (b+x)^\beta dx = \frac{(b+x)^{\beta+1}}{\beta+1} + C.$$

Si α est un entier négatif, la formule (8) ne peut conduire que jusqu'à l'intégrale $\int \frac{(b+x)^\beta}{a+x}dx$ pour laquelle la substitution indiquée au n° 5 entraîne des calculs évidemment moins compliqués que s'il s'agissait de la proposée (5); et, de même, dans les autres cas d'intégrabilité pratique, à la discussion détaillée desquels il serait oiseux de nous attarder.

10. L'intégrale de la *différentielle binôme*,

$$(9) \qquad \int x^m (a+bx^n)^p dx,$$

où a, b sont des constantes, et m, n, p des exposants réels commensurables quelconques, est changée par la substitution algébrique

$$(10) \qquad x = b^{-\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}}, \qquad \text{d'où} \qquad dx = \frac{1}{n} b^{-\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}-1} dt,$$

en

$$\frac{1}{n} b^{-\frac{m+1}{n}} \int (a+t)^p t^{\frac{m+1}{n}-1} dt,$$

forme que prend l'intégrale (5) (sauf un facteur constant et la notation de la variable) quand on y fait

$$(11) \qquad b=0, \qquad \alpha = p, \qquad \beta = \frac{m+1}{n} - 1.$$

On en conclut immédiatement qu'*elle est réductible par une substitution algébrique à l'intégrale d'une différentielle rationnelle, par suite exprimable au moyen de fonctions algébriques et logarithmiques, quand l'un au moins des trois*

nombres

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m+1}{n}+p \tag{12}$$

est entier.

Dans tous les cas, on peut employer à sa réduction, à son calcul effectif s'il y a lieu, toutes les formules mentionnées dans l'alinéa II *du numéro précédent,* en y réalisant les hypothèses particulières (11) et en inversant la substitution (10), soit dans ces formules elles-mêmes, soit dans le résultat définitif de leur application. Mais nous devons supprimer les détails du calcul, qui sont aussi fastidieux que dénués d'intérêt.

Dans l'intégrale (9) on peut rendre les exposants m, n entiers et ce dernier positif; car, si n était donné négatif, on écrirait aussi bien

$$\int x^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx,$$

après quoi il suffit d'appeler M le plus petit commun multiple positif des dénominateurs des exposants $m+np$, et $-n$ mis sous formes de fractions irréductibles, et d'exécuter la substitution $x=t^{\mathrm{M}}$.

11. Considérons, par exemple, l'intégrale

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

où m est un exposant entier. Elle est circulaire, et peut être calculée par les procédés indiqués aux n°s 226**, 228** ou 6. Mais, en l'écrivant

$$\int x^m(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx,$$

on voit qu'elle rentre aussi dans la classe de celles dont nous venons de parler, de plus qu'elle tombe toujours dans un cas d'intégrabilité pratique. Car les nombres (12) sont ici

$$-\frac{1}{2}, \quad \frac{m+1}{2}, \quad \frac{m}{2},$$

dont l'un des deux derniers est nécessairement entier, que m soit pair ou non.

Ici les formules de réduction ne peuvent faire varier m que de

deux unités à la fois; mais celle qui diminue la valeur numérique de cet exposant conduit toujours à une formule finale où, dans l'intégrale complémentaire quand elle n'y est pas multipliée par un coefficient $= 0$, m est égal tantôt à 0 tantôt à -1. Le calcul est alors achevé parce que cette intégrale complémentaire est l'une des intégrales circulaires réduites dont nous avons trouvé les expressions aux nos 7 et 228**, II.

On peut en dire autant, ou à peu près sur l'intégrale

$$\int \frac{x^m \, dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \int x^{m-\frac{1}{2}} (a-x)^{-\frac{1}{2}} \, dx,$$

qui pourrait aussi être ramenée à la forme précédente par la substitution $x = at^2$.

Différentielles transcendantes.

12. Si a désigne quelque constante, et F une composante rationnelle quelconque, l'expression $F(e^{ax})$ renferme un très grand nombre de transcendantes courantes, en particulier toute fonction composée rationnelle des tangentes, cotangentes, sinus, etc., de divers multiples entiers ou fractionnaires de x, puisque ces dernières fonctions s'expriment toutes rationnellement au moyen d'une seule exponentielle ayant pour exposant une partie aliquote de ix (216**), (220**), (231**). Et comme $F(e^{ax})$ est toujours une fonction unipériodique polarisée $\left(\text{de période } \frac{2\pi i}{a}\right)$ (264**), *la méthode générale expliquée au n° 295** conduit d'une manière sûre et uniforme à l'expression de l'intégrale*

$$(1) \qquad \int F(e^{ax}) \, dx,$$

au moyen des fonctions que nous connaissons.

Un autre procédé moins net, mais d'une réussite certaine aussi, consiste à *transformer cette intégrale par la substitution*

$$x = \frac{1}{a} \, l(t), \qquad \text{d'où} \qquad dx = \frac{1}{at} \, dt$$

en

$$\frac{1}{a} \int \frac{F(t)}{t} \, dt,$$

que nous savons calculer parce que la fonction sous le signe $\int$ est maintenant rationnelle (170**), (171**), (188**), (1 *et suiv.*). On achève en opérant la substitution inverse $t = e^{ax}$.

13. Pour faire saisir complètement le mécanisme de la première méthode, nous l'appliquerons au calcul de

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{\cos x - \mathrm{H}},$$

en supposant réelle la constante H d'ailleurs quelconque.

On voit de suite que $f(x)$ admet 2π pour période élémentaire, que ses valeurs polaires sont toutes deux nulles parce que celles de $\cos x$ sont infinies (264**) et qu'elle est du second ordre (266**). Cela posé, il y a deux cas bien distincts à considérer.

I. Quand on a

$$\mathrm{H} \neq \pm 1, \tag{2}$$

les racines de l'équation

$$\cos x - \mathrm{H} = 0 \tag{3}$$

sont toutes simples, aucune d'elles n'est multiple de π, et en appelant h', $h'' = -h'$, deux d'entre elles incongrues qu'on peut supposer dans une même bande, la décomposition de $f(x)$ y donne les seules fractions simples

$$\frac{\mathrm{A}'}{x - h'} + \frac{\mathrm{A}''}{x - h''},$$

où l'on a

$$\mathrm{A}' = \left[\frac{x - h'}{\cos x - \mathrm{H}}\right]_{x=h'} = -\frac{1}{\sin h'},$$

$$\mathrm{A}'' = -\frac{1}{\sin(-h')} = -\mathrm{A}', \tag{4}$$

cela encore parce que dans cette bande le résidu intégral de $f(x)$ s'évanouit (267**).

On a donc aussi (280**)

$$f(x) = \mathrm{A}'\xi_1(x - h', 2\pi) + \mathrm{A}''\xi_1(x - h'', 2\pi);$$

ici la constante A_0 du numéro cité se réduit à o, parce que l'éga-

lité (4) assigne précisément au second membre les valeurs polaires o, o du premier (278**, IV).

On en conclut (295**)

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= A'\,l\,o(x-h',\,2\pi)+A''\,l\,o(x-h'',\,2\pi)+C\\ &= A''\,l\,\frac{o(x-h'',\,2\pi)}{o(x-h',\,2\pi)}+C\\ &= \frac{1}{\sin h'}\,l\,\frac{\sin\dfrac{x+h'}{2}}{\sin\dfrac{x-h'}{2}}+C \qquad (293^{**}).\end{aligned}$$

Pour $H^2>1$, h' est imaginaire, mais il est facile de rendre une forme réelle à l'expression précédente. On a $\cos h'=H$ et $\sin h'=i\sqrt{H^2-1}$, le radical étant pris avec un signe convenable; en développant donc les deux termes de la fraction placée sous le signe l, les multipliant par $2\dfrac{\cos\frac{h'}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ et posant $\dfrac{1+H}{-\sqrt{H^2-1}}=K$, l'expression ci-dessus peut s'écrire

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\sqrt{H^2-1}}\left[\frac{1}{2i}\,l\left(K\tang\frac{x}{2}-i\right)-\frac{1}{2i}\,l\left(K\tang\frac{x}{2}+i\right)\right]+C\\ &=\frac{2}{\sqrt{H^2-1}}\,\operatorname{arc\,tang}\left(K\tang\frac{x}{2}\right)+C' \quad (218^{**}).\end{aligned}$$

II. Quand la condition (2) n'est pas remplie, l'équation (3) n'a que des racines doubles, et en appelant h l'une d'elles, la décomposition de $f(x)$ donne, dans la bande correspondante, une seule fraction simple de la forme

$$\frac{A}{(x-h)^2},$$

ce dont on s'assure en faisant le calcul ou bien plus simplement en se souvenant encore que dans chaque bande le résidu intégral de $f(x)$ s'évanouit (267**).

On a donc (280**)

$$f(x)=A\,\xi_2(x-h,\,2\pi),$$

parce que les valeurs polaires de la fonction ξ_2 sont nulles comme

celles de $f(x)$ (278**, V), d'où

$$\int f(x)\,dx = -\text{A}\,\xi_1(x-h,\ 2\pi)+\text{C} \qquad (278^{**},\ \text{I}),$$
$$= -\frac{\text{A}}{2}\cot\frac{x-h}{2}+\text{C} \qquad (283^{**}).$$

En supposant par exemple $\text{H} = +1$, il vient $h = 0$ et

$$\frac{1}{\cos x - 1} = 1 : \left(-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots\right) = -\frac{2}{x^2}+\ldots \quad (231^{**}),$$

d'où $\text{A} = -2$ et par suite

$$\int f(x)\,dx = \cot\frac{x}{2}+\text{C}.$$

14. *Des calculs bien plus faciles fournissent l'expression de l'intégrale*

$$\int \text{F}(e^{a_1 x},\ e^{a_2 x},\ \ldots,\ e^{a_k x})\,dx$$

quand la composante F *est entière,* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *désignant des constantes quelconques.* Car le développement de la fonction composée la change en une fonction linéaire de diverses exponentielles, dont chaque terme s'intègre immédiatement.

Ceci comprend évidemment le cas où la même fonction composée à composante entière contiendrait des sinus et cosinus de fonctions linéaires quelconques de x, parce que ces dernières fonctions simples peuvent être remplacées par des fonctions entières d'exponentielles de la même forme e^{ax} (231**). On trouvera, par exemple,

$$(5)\quad \begin{cases} \int e^{ax}\sin bx\,dx = \int e^{ax}\dfrac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}\,dx \\ \qquad = \dfrac{1}{2i}\int e^{(a+bi)x}\,dx - \dfrac{1}{2i}\int e^{(a-bi)x}\,dx \\ \qquad = \dfrac{e^{(a+bi)x}}{2i(a+bi)} - \dfrac{e^{(a-bi)x}}{2i(a-bi)} + \text{C} \\ \qquad = \dfrac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + \text{C}. \end{cases}$$

15. Quelquefois ces méthodes générales sont moins expéditives que certains artifices dont voici des exemples.

I. Soit d'abord à calculer

$$(6) \qquad \int \sin^m x \cos^n x \, dx,$$

intégrale où m, n sont des entiers positifs, nuls, ou négatifs, et qui rentre aussi dans la forme générale (1) considérée tout à l'heure.

L'intégration par parties de la différentielle écrite

$$\frac{\cos^{n-1} x \, d \sin^{m+1} x}{m+1} \qquad (231^{**})$$

donne d'abord

$$(7) \quad \int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx.$$

La substitution de $1 - \cos^2 x$ à un facteur $\sin^2 x$, sous l'intégrale complémentaire, et la résolution de cette relation par rapport à l'intégrale cherchée qui s'est introduite une seconde fois, donne ensuite

$$(8) \quad \int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx.$$

La résolution de celle-ci par rapport à l'intégrale complémentaire, suivie de l'addition de 2 à n, donne encore

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x \, dx = &-\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} \\ &+ \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin^m x \cos^{n+2} x \, dx. \end{aligned} \right.$$

En adjoignant enfin aux relations (7), (8), (9), ce qu'elles deviennent par la permutation des exposants m, n accompagnée du changement de x en $\frac{\pi}{2} - x$, on obtient six formules de réduction qui deviennent, il est vrai, illusoires les unes ou les autres quand $m+1$ ou $n+1$ ou $m+n$ s'évanouissent, mais dont l'emploi répété, fait tour à tour s'il y a lieu, permet toujours de ramener l'intégrale cherchée à des fonctions trigonométriques et à ce qu'elle devient quand on réduit à 0 ou à 1 la valeur numérique de chaque exposant. Le lecteur s'en assurera sans difficulté.

Cette réduction opérée, il ne restera plus qu'à exécuter l'une

ou l'autre de ces neuf intégrations faciles

$$\int 1 . dx = x + C, \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C,$$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int \sin x \, d \cos x = \frac{\sin^2 x}{2} + C,$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = l \sin x + C, \qquad \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -l \cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{d \tang x}{\tang x} = l \tang x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = l \tang \frac{x}{2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -l \tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C.$$

Les considérations du n° 295** expliquent les dissemblances que présentent ces divers résultats, en dépit de l'analogie qui semble rapprocher toutes ces intégrales.

II. Soit encore à calculer

$$(10) \qquad \int [\cos(a_1 x + b_1) \cos(a_2 x + b_2) \ldots \cos(a_k x + b_k)] \, dx.$$

L'application répétée de la formule

$$\cos(a_i x + b_i) \cos(a_j x + b_j)$$
$$= \tfrac{1}{2} \left\{ \cos[(a_i + a_j)x + (b_i + b_j)] + \cos[(a_i - a_j)x + (b_i - b_j)] \right\}$$

permet de transformer la fonction à intégrer en une expression linéaire par rapport à des cosinus de diverses fonctions linéaires de x, par suite de décomposer l'intégrale en d'autres de la forme

$$\int \cos(Ax + B) \, dx = \begin{cases} \dfrac{\sin(Ax + B)}{A} + C, & \text{si } A \neq 0, \\ x \cos B + C, & \text{si } A = 0. \end{cases}$$

Quand des sinus se mêlent à des cosinus dans le produit à inté-

grer, les choses se passent de la même manière à fort peu près; il n'y a qu'à substituer généralement $\cos\left[-ax+\left(\frac{\pi}{2}-b\right)\right]$ à $\sin(ax+b)$.

III. L'exposant m étant supposé entier positif, l'intégrale

$$\int \cos^m x\, dx$$

est un cas particulier de la précédente (10) et aussi bien de l'intégrale (6). Mais on l'obtient plus facilement encore en substituant à $\cos^m x$ son développement en une fonction linéaire de cosinus de multiples entiers de x (246**).

On traitera de la même manière l'intégrale

$$\int \sin^m x\, dx,$$

ou bien on la ramènera à la précédente par la substitution de $\frac{\pi}{2}-x$ à x.

IV. Quand F est une composante rationnelle, l'intégrale

$$\int F(\sin x, \cos x)\, dx, \tag{11}$$

qui comprend toutes celles où la fonction sous le signe est une fonction rationnelle des six lignes trigonométriques de x, appartient à la classe de celles qui ont été traitées généralement au n° 12. Mais quand les coefficients de F sont réels, on évite l'intrusion transitoire des imaginaires par la substitution

$$x = 2 \operatorname{arc\,tang} t,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\frac{x}{2} = t, \tag{12}$$

puis

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt,$$

ce qui change l'intégrale considérée (11) en

$$\int F\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

La différentielle étant devenue rationnelle en conservant des

coefficients réels, on atteint le résultat cherché par les moyens indiqués aux nos 1 et suivants, puis en exécutant la substitution inverse (12) dans l'expression en t qu'ils fournissent.

16. L'intégrale (6) se ramène à celle considérée au n° 9, même quand les exposants m, n ne sont que fractionnaires, par la substitution

$$x = \arc\sin t^{\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

d'où (231**), (242**),

$$\sin x = t^{\frac{1}{2}}, \qquad \cos x = (1-t)^{\frac{1}{2}}, \qquad dx = \frac{1}{2}\, t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\, dt,$$

puis

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{1}{2}\int t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}\, dt,$$

et toutes les considérations du numéro cité deviennent applicables à cette dernière.

Quand m, n sont des entiers, on se trouve toujours dans l'un ou l'autre des *cas d'intégrabilité* signalés à cette occasion, ce qui montre d'une autre manière la possibilité d'exprimer alors l'intégrale (6) au moyen des transcendantes inférieures.

On remarquera encore que les formules de réduction du n° 15 sont au fond celles mêmes du n° 9, transformées par la substitution inverse de (13).

17. *Si la composante* F *est entière, et si $f(x)$ est un polynôme entier, l'intégrale*

$$\int \frac{F(x, e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \ldots, e^{a_k x})}{f(x)}\, dx \tag{14}$$

est toujours exprimable au moyen de fonctions connues et de la transcendante

$$\int \frac{e^t}{t}\, dt. \tag{15}$$

Le développement du numérateur de la fonction à intégrer la résout en termes dont chacun est le produit d'une exponentielle de la forme e^{Ax} par une fraction rationnelle en x, après quoi la

décomposition de ces fractions rationnelles en fractions simples réduit l'intégrale à une expression linéaire par rapport à d'autres toutes des formes

$$\int x^m\,dx,\quad \int \frac{dx}{x^q},\quad \int x^m e^{\mathrm{A}x}\,dx,\quad \int \frac{e^{\mathrm{A}x}}{(x-\alpha)^q}\,dx,$$

où les exposants m, q sont des entiers positifs.

De ces intégrales élémentaires, les deux premières s'obtiennent immédiatement.

L'intégration par parties de la troisième donne ensuite

$$\int x^m e^{\mathrm{A}x}\,dx = \frac{x^m e^{\mathrm{A}x}}{\mathrm{A}} - \frac{m}{\mathrm{A}}\int x^{m-1} e^{\mathrm{A}x}\,dx,$$

formule dont l'application réitérée conduit à son expression.

Celle de la quatrième donne enfin, sous la condition $q > 1$,

$$\int \frac{e^{\mathrm{A}x}}{(x-\alpha)^q}\,dx = \frac{e^{\mathrm{A}x}}{(-q+1)(x-\alpha)^{q-1}} - \frac{\mathrm{A}}{-q+1}\int \frac{e^{\mathrm{A}x}}{(x-\alpha)^{q-1}}\,dx;$$

cette formule ramène progressivement l'intégrale élémentaire dont il s'agit à des fonctions connues et finalement à

$$\int \frac{e^{\mathrm{A}x}}{x-\alpha}\,dx,$$

car au delà elle serait illusoire. La substitution $x = \alpha + \frac{t}{\mathrm{A}}$ change ensuite cette dernière en l'intégrale (15) multipliée par $e^{\mathrm{A}\alpha}$.

18. Dans des cas de la nature des deux suivants, des intégrations par parties réitérées suffisent à l'achèvement des calculs, parce que la différentielle de l'intégrale complémentaire se décompose toujours en deux facteurs, l'un puissance d'une transcendante à dérivée algébrique dont l'exposant s'abaisse jusqu'à zéro, l'autre toujours algébrique et s'intégrant à vue.

I. Si m, n sont des exposants, le second entier positif, le premier quelconque, même imaginaire, on a

$$(16)\quad \int x^m [l(x)]^n\,dx = \frac{x^{(m+1)}[l(x)]^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m [l(x)]^{n-1}\,dx,$$

et ainsi de suite en poursuivant jusqu'à l'annulation de l'exposant de $l(x)$.

Cette formule est illusoire pour $m = -1$, mais à sa place on trouve

$$\int \frac{[l(x)]^n}{x} dx = [l(x)]^{n+1} - n \int \frac{[l(x)]^n}{x} dx.$$

Dans cette relation, comme dans bien d'autres circonstances, l'intégrale cherchée s'est reproduite, et il suffit de la résoudre pour avoir

$$\int \frac{[l(x)]^n}{x} dx = \frac{[l(x)]^{n+1}}{n+1} + c,$$

résultat pour ainsi dire évident.

II. On a

$$(17) \quad \int [\arcsin x]^n dx = x[\arcsin x]^n - n \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} [\arcsin x]^{n-1} dx,$$

puis en intégrant une seconde fois par parties

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} [\arcsin x]^{n-1} dx = -\sqrt{1-x^2}[\arcsin x]^{n-1} + (n-1) \int [\arcsin x]^{n-2} dx.$$

L'intégrale cherchée s'est reproduite, mais avec une valeur de n diminuée de 2. On peut donc poursuivre les intégrations par parties jusqu'à réduire n à 0 ou à 1 dans l'intégrale complémentaire. Celle-ci se calcule alors immédiatement et, en remontant la chaîne des formules de réduction successivement écrites, on obtient l'expression de l'intégrale cherchée.

19. Les expressions *courantes* renferment seulement les irrationnelles algébriques dont les dérivées appartiennent toutes à cette même classe, avec des transcendantes ayant précisément le calcul inverse des dérivées pour origine première, les unes et les autres en mélange quelconque avec les fonctions rationnelles; ceci explique pourquoi leur différentiation en reproduit toujours de semblables, pourquoi elle est en fait si facile.

Mais leur intégration est essentiellement aléatoire, en tant du moins qu'il s'agit de la réaliser au moyen de fonctions connues; ses résultats, son succès même, dépendent souvent de particularités en apparence infimes, et la route à suivre n'est tracée par

aucune règle ayant un vaste champ d'application. C'est un art dont les procédés, s'ils s'écartent peu des types classiques dont nous venons d'expliquer le mécanisme, ne peuvent cependant être bien enseignés que par la pratique. Nous fatiguerions donc inutilement le lecteur en nous livrant plus longtemps à des calculs de ce genre, de tous les plus fastidieux peut-être, en dehors des cas où ils ont une utilité prochaine.

Avant de quitter ce sujet, nous devons l'inviter toutefois à retenir soigneusement cette observation générale dont les applications particulières se multiplient pour ainsi dire à chaque pas.

Toute transformation d'une intégrale indéfinie connue, en une autre qui ne l'est pas, donne l'expression de celle-ci, par sa simple exécution sur celle de la première.

Telle est *l'intégration par substitution* (333*) que nous avons employée plusieurs fois déjà, sur laquelle est fondée la deuxième méthode seulement indiquée pour le calcul de l'intégrale (1).

Si l'on posait $x = e^t$, d'où $dx = e^t\,dt$, ou bien $x = \sin t$, d'où $dx = \cos t\,dt$, on ferait d'un seul coup rentrer les intégrales (16), (17) dans le type (14).

Telles sont encore, quand la fonction à intégrer dépend de quelque variable paramétrique, *la différentiation de l'intégrale indéfinie exécutée par rapport à ce paramètre, mais cela sous le signe* $\int$, *ou bien son intégration exécutée de même* (quand elle est pratiquement possible) (225*), (226*).

De la formule évidente

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C,$$

on tire immédiatement, par exemple, en différentiant m fois sous le signe $\int$ par rapport à a considérée comme une variable paramétrique

$$\int x^m e^{ax}\,dx = \frac{d^m}{da^m}\,(e^{ax}.\,a^{-1}) + C',$$

expression très facile à développer (255*). Etc.

Nous insisterons d'autant moins sur ces méthodes particulières, qu'on en trouvera des applications dans le Chapitre suivant.



CHAPITRE II.

CALCUL DE CERTAINES INTÉGRALES DÉFINIES PAR DES MOYENS N'EXIGEANT PAS LA CONNAISSANCE DES INTÉGRALES INDÉFINIES.

Artifices divers.

20. Quand une intégrale indéfinie est exprimable au moyen de fonctions connues, le calcul de l'intégrale définie de la même différentielle, prise entre des limites et sur un chemin quelconques, souffre pour seules difficultés celles que la discussion de ces fonctions peut offrir.

Quand il n'en est pas ainsi, on est ordinairement réduit à calculer approximativement la valeur numérique de l'intégrale définie, en recourant soit aux développements en séries exigés par le cheminement, soit à tout autre procédé plus expéditif que les circonstances suggéreraient. Mais parfois il arrive aussi que, *pour certaines valeurs des limites,* celle de l'intégrale définie peut être obtenue exactement en nombres, ou bien, si elle dépend de variables paramétriques, exprimée par des fonctions connues de ces dernières, cela *par des moyens indirects qui n'exigent pas le calcul préalable de l'intégrale indéfinie,* qui sont même préférables à cette méthode normale dans plus d'un cas où elle serait cependant praticable. Les artifices de ce genre sont d'une variété pour ainsi dire infinie, et nous pouvons seulement en donner des exemples choisis.

Presque toujours, *les valeurs des limites qui permettent l'intervention de ces méthodes indirectes sont infinies, ou bien singulières pour la fonction à intégrer,* d'ou résulte pour les intégrales considérées le caractère *artificiel* sur lequel nous nous sommes étendu aux nos 238* et suivants. Cette remarque générale explique d'avance les anomalies présentées par beaucoup d'entre

elles, qui sont affectées de discontinuité ou d'autres singularités, relativement aux quantités variables dont elles dépendent souvent (24, *inf.*).

21. De tous ces artifices, l'un des plus simples et des plus souvent utiles consiste dans la différentiation ou l'intégration sous le signe $\int$ dont nous avons parlé aux nos 232*, 233* (*Cf.* 19). Comme ces opérations modifient profondément les intégrales définies sur lesquelles on les exécute, on obtient de nouvelles formules en quelque sorte à volonté; *mais celles-ci ne sont que de pures inductions dans les cas très fréquents où il s'agit d'intégrales artificielles, et même il n'est pas rare qu'elles soient fausses* (24, *inf.*). Car ce caractère enlève toute certitude à la possibilité d'intervertir ainsi l'ordre naturel des opérations successives à exécuter sur la fonction qu'il fallait primitivement intégrer (245*). *Il ne faut donc pas manquer alors de vérifier après coup leur exactitude.*

22. Voici une application de la différentiation paramétrique.

En appelant α une quantité positive et $\alpha^{\frac{1}{2}}$ la détermination positive de sa racine carrée, on a

$$\int \frac{dx}{x^2+\alpha} = \alpha^{-\frac{1}{2}} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\right)^2} d\left(\frac{x}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\right) = \alpha^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{\alpha^{\frac{1}{2}}} + C \quad (219^{**}),$$

d'où, en intégrant de o à X sur l'axe des quantités réelles et adoptant pour arc tang $\frac{x}{\alpha^{\frac{1}{2}}}$ la détermination qui s'évanouit avec x,

$$\int_0^X \frac{dx}{x^2+\alpha} = \alpha^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{X}{\alpha^{\frac{1}{2}}},$$

puis en faisant X infini positif

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha} = \frac{\pi}{2} \alpha^{-\frac{1}{2}} \qquad (\textit{loc. cit.}).$$

Si maintenant on différentie n fois par rapport à α, en opérant sous le signe $\int$ dans le premier membre, on obtient presque

immédiatement la nouvelle formule

$$(2) \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^{n+1}} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n}\frac{\pi}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}-n},$$

dont il faut toutefois vérifier l'exactitude parce que l'intégrale originaire (1) était artificielle.

A cet effet, nous appellerons x_1 une quantité positive quelconque et nous écrirons

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha} = \int_0^{x_1} \frac{dx}{x^2+\alpha} + \int_{x_1}^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha}$$
$$= \int_0^{x_1} \frac{dx}{x^2+\alpha} - \int_{\frac{1}{x_1}}^0 \frac{dt}{1+\alpha t^2},$$

en transformant par la substitution $x = \frac{1}{t}$ l'intégrale prise de x_1 à ∞. Aucune de ces deux dernières intégrales n'étant artificielle, on peut les différentier par rapport à α en différentiant les fonctions placées sous les signes d'intégration (232*); nous avions donc le même droit pour l'intégrale originaire (1), et la formule (2) est exacte.

On l'obtiendrait directement par la méthode des nos 1 ou 4, mais le procédé ci-dessus est infiniment plus expéditif.

23. L'exemple suivant mettra en œuvre l'intégration paramétrique.

Dans la formule (5) du n° 14, nous ferons $b = 1$, nous écrirons $-a$ au lieu de a, et nous intégrerons de o à X sur l'axe des quantités réelles. Il vient ainsi

$$(3) \qquad \int_0^X e^{-ax}\sin x\,dx = \frac{1}{1+a^2} - e^{-aX}\frac{\cos X + a\sin X}{1+a^2},$$

puis, en supposant désormais a réel et > 0 et faisant X infini positif,

$$(4) \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,dx = \frac{1}{1+a^2};$$

effectivement, l'exposant $-aX$ de l'exponentielle e^{-aX} est infini négatif (201**, I), et la fonction qui la multiplie conserve, quelle

que soit X, puisque cette quantité est réelle, une valeur numérique inférieure à $\frac{1+a}{1+a^2}$ (235**).

En intégrant maintenant, par rapport à a, de o à $+\infty$ sur l'axe des quantités positives, le second membre de cette relation et la fonction placée sous le signe d'intégration dans le premier, on trouve

$$(5) \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{da}{1+a^2} = \frac{\pi}{2} \qquad (219^{**});$$

car on a $\int e^{-ax}\sin x\,da = -e^{-ax}\frac{\sin x}{x} + C$, et l'exponentielle e^{-ax} tend vers zéro pour a infini positif quand x a une valeur positive.

Mais ce résultat est précaire pour plus d'une raison : d'abord l'intégrale (4) est artificielle, et nous n'avons pas le droit incontestable de substituer, à son intégration par rapport à a, celle de la fonction de x, a, sur laquelle elle porte; ensuite cette formule (4) suppose essentiellement $a > 0$, et nous avons intégré au contraire à partir de $a = 0$; .... Des raisonnements plus solides sont donc nécessaires pour mettre la formule (5) hors de doute.

I. L'intégrale (3) étant naturelle, et impliquant une fonction de x, a qui est indéfiniment olotrope, il est permis de l'intégrer par rapport à a en procédant sous le signe $\int$ (233*); si donc on intègre de cette manière les deux membres de la formule qui la contient, en marchant sur l'axe des quantités réelles entre les limites toutes deux positives $\alpha < \mathcal{A}$, il vient

$$(6) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{X} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\mathcal{A} x}}{x}\sin x\,dx = \operatorname{arc\,tang}\mathcal{A} - \operatorname{arc\,tang}\alpha \\ \displaystyle\qquad\qquad - \int_{\alpha}^{\mathcal{A}} e^{-aX}\frac{\cos X + a\sin X}{1+a^2}\,da, \end{cases}$$

après avoir opéré, pour fixer les idées, avec la détermination de arc tang a qui s'évanouit avec a.

En supposant maintenant X positive, la valeur numérique de l'intégrale du second membre est inférieure à $(\mathcal{A} - \alpha)e^{-\alpha X}\frac{1+\mathcal{A}}{1+\alpha^2}$, produit de la longueur du chemin par une quantité positive évidemment supérieure à toutes les valeurs que la fonction à inté-

grer peut y prendre (237*); pour X infinie positive, elle tend donc vers zéro, et la relation (6) devient

$$(7)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-\mathrm{A}x}}{x}\sin x\,dx = \operatorname{arc\,tang}\mathrm{A} - \operatorname{arc\,tang} a.$$

II. *Si a est une quantité positive quelconque, l'intégrale artificielle*

$$(8)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x}\sin x\,dx$$

existe et tend vers zéro pour a infinie.

Le premier point résulte immédiatement du lemme II du n° 428**; car le produit de la fonction placée sous le signe $\int$ par une puissance de x à exposant quelconque est infiniment petit pour x infinie positive (207**).

Si l'on représente ensuite par x_0, $X(>x_0)$ deux quantités positives, la première invariable, la seconde infinie, on a évidemment, pour $x \gtreqless x_0$,

$$\frac{e^{-ax}}{x}\sin x \mathrel{\overline{\overline{<}}} \frac{e^{-ax}}{x_0},$$

d'où (28**)

$$\int_{x_0}^{X} \frac{e^{-ax}}{x}\sin x\,dx \mathrel{\overline{\overline{<}}} \int_{x_0}^{X}\frac{e^{-ax}}{x_0}\,dx \mathrel{\overline{\overline{<}}} \frac{e^{-ax_0}-e^{-aX}}{ax_0},$$

puis, en observant que l'exposant $-aX$ est infini négatif.

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x}\sin x\,dx = \int_0^{x_0}\frac{e^{-ax}}{x}\sin x\,dx + \int_{x_0}^\infty \frac{e^{-ax}}{x}\sin x\,dx$$
$$\mathrel{\overline{\overline{<}}} \int_0^{x_0}\frac{e^{-ax}}{x}\sin x\,dx + \frac{e^{-ax_0}}{ax_0}.$$

Or le second terme de la dernière somme tend vers zéro pour a infini, et il en est de même pour le premier, intégrale naturelle d'une fonction qui, sur le chemin d'intégration, ne prend visiblement que des valeurs toutes inférieures à quelque quantité infiniment petite (237*).

III. Appelant ensuite x_0 une quantité réelle et $\varphi(x)$ une fonction restant olotrope, positive, en décroissant sans cesse et

indéfiniment quand x prend à partir de x_0 des valeurs réelles indéfiniment croissantes, nous considérons l'intégrale définie

$$(9) \qquad \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) \sin x \, dx,$$

prise sur l'axe des quantités réelles, et nous prouverons qu'*elle existe,* qu'en outre *sa valeur évidemment réelle est numériquement inférieure à* $\pi\,\varphi(\mu\pi)$ *quand* x_0 *est de la forme* $\mu\pi$, *multiple entier de* π.

La fonction à intégrer étant finie pour des valeurs infinies réelles de x puisque $\varphi(x)$ est infiniment petite et que $\sin x$ conserve une valeur réelle numériquement < 1, il suffit (242*, II) de prouver la convergence de la série formée par les valeurs obtenues en intégrant successivement la même différentielle sur les segments de l'axe considéré, que découpent les points

$$\mu\pi, \quad (\mu+1)\pi, \quad (\mu+2)\pi, \quad \ldots,$$

où μ est quelque entier donnant $\mu\pi > x_0$.

L'intégrale

$$I_m = \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \varphi(x) \sin x \, dx,$$

où m désigne un entier quelconque $\geqq \mu$, est une quantité réelle, positive ou négative selon que m est pair ou impair, car $\varphi(x)$ est toujours positive et entre $m\pi$ et $(m+1)\pi$, $\sin x$ reste positif dans le premier cas, négatif dans le second (235**). De plus, on a numériquement

$$I_m > I_{m+1},$$

car les substitutions $x = m\pi + t$, $x = (m+1)\pi + t$ transforment ces deux intégrales en

$$\pm \int_0^{\pi} \varphi(m\pi + t) \sin t \, dt, \qquad \mp \int_0^{\pi} \varphi[(m+1)\pi + t] \sin t \, dt,$$

selon que m est pair ou impair, où par hypothèse on a toujours

$$\varphi(m\pi + t) > \varphi[(m+1)\pi + t] \qquad (28^{**}).$$

Enfin I_m est numériquement inférieure à $\pi\varphi(m\pi)$, car dans

l'intégrale numériquement égale $\int_0^\pi \varphi(m\pi + t)\sin t\, dt$, la longueur du chemin est π et, à cause de la décroissance constante de $\varphi(x)$, on y a toujours $\varphi(m\pi + t)\sin t < \varphi(m\pi).1$. Il en résulte $\lim I_m = 0$ pour m infini, puisque $\varphi(x)$ tend vers 0 quand x est infinie positive; d'où la convergence de la série en question

$$I_\mu + I_{\mu+1} + I_{\mu+2} + \ldots,$$

dont les termes sont ainsi réels, de signes alternatifs, et décroissent sans cesse et indéfiniment en valeur numérique (101*).

Pour $x_0 = \mu\pi$, la somme de cette série fournit précisément la valeur de l'intégrale (9); or, la valeur numérique de cette somme est inférieure à celle de son premier terme I_μ (*loc. cit.*), que nous venons de constater l'être elle-même à $\pi\varphi(\mu\pi)$.

IV. *Pour* $\lim a = 0$, *l'intégrale* (8) *tend vers l'intégrale* (5).

Dans leur différence

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{x} \sin x\, dx,$$

la fonction qui multiplie $\sin x$ sous le signe $\int$ est olotrope et positive partout ailleurs qu'en $x = 0$; elle tend vers 0 quand x augmente sans limite; de plus, elle finit par décroître sans cesse, car sa dérivée

$$\frac{d}{dx}\frac{1 - e^{-ax}}{x} = \frac{-1 + (1 + ax)e^{-ax}}{x^2}$$

finit évidemment par rester négative (207**).

En prenant donc l'entier μ assez grand pour que la décroissance continuelle de cette fonction ait lieu à partir de $\mu\pi$, puis écrivant

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{x} \sin x\, dx = \int_0^{\mu\pi} \frac{1 - e^{-ax}}{x} \sin x\, dx + \int_{\mu\pi}^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{x} \sin x\, dx,$$

on voit que la dernière intégrale tend vers 0 pour a infiniment petit, parce qu'elle est numériquement inférieure à la quantité $\pi \frac{1 - e^{-a\mu\pi}}{\mu\pi}$ (III), et que celle-ci est évidemment infiniment petite. Le raisonnement de la fin de l'alinéa II, montrant qu'il en est de même pour la première, le premier membre de cette relation tend aussi vers 0, fait équivalent à celui que nous voulions établir.

V. Il résulte de tout ceci, que la relation (7) peut être mise sous la forme

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^\infty e^{-\mathfrak{b}x}\frac{\sin x}{x}\,dx = \text{arc tang}\,\mathfrak{b} - \text{arc tang}\,\alpha,$$

ou bien encore

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,dx = \text{H} - \text{arc tang}\,a,$$

où H représente quelque quantité indépendante de a.

Si maintenant on fait croître a indéfiniment, il vient (II)

$$0 = \text{H} - \lim \text{arc tang}\,a = \text{H} - \frac{\pi}{2},$$

d'où $\text{H} = \frac{\pi}{2}$, et par suite

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\,a.$$

De ceci, enfin, on déduit rigoureusement la formule (5) en faisant tendre a vers zéro, puis ayant égard à l'égalité

$$\lim \text{arc tang}\,a = 0,$$

ainsi qu'aux conclusions de l'alinéa IV.

24. En laissant le paramètre b indéterminé, mais réel dans la formule (5) du n° 14 d'où nous sommes partis, on calculerait de la même manière la valeur de cette autre intégrale artificielle

$$(10)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx,$$

qu'il est toutefois plus vite fait de déduire du résultat précédent.

Quand b est positif, elle est toujours égale à $\frac{\pi}{2}$; car, X désignant une quantité positive, la substitution $x = \frac{t}{b}$ donne

$$\int_0^{\text{X}} \frac{\sin bx}{x}\,dx = \int_0^{b\text{X}} \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

puis, pour X infinie,

$$(11)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} \qquad (23).$$

Quand b est négatif, elle est égale à $-\frac{\pi}{2}$, à cause de

$$\int_0^X \frac{\sin(-bx)}{x}\,dx = -\int_0^X \frac{\sin bx}{x}\,dx.$$

Quand $b = 0$, elle s'évanouit évidemment.

Ainsi donc, l'intégrale (10) est une fonction de b, $\psi(b)$, qui est discontinue en $b = 0$, puisqu'elle tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand b est infiniment petit positif, vers $-\frac{\pi}{2}$ quand b est infiniment petit négatif, et jamais, par suite, vers $\psi(0) = 0$.

Cette même fonction, constante ainsi entre deux valeurs quelconques de b non nulles et de même signe, y est olotrope. Mais la différentiation de la formule (11), opérée sous le signe d'intégration dans le premier membre, conduirait au résultat

$$\psi'(b) = 0 = \int_0^\infty \cos bx\,dx,$$

qui est absurde à cause de

$$\int_0^X \cos bx\,dx = \frac{\sin bX}{b},$$

fonction dépourvue de limite pour X infinie.

Ces anomalies sont de celles auxquelles nous faisions allusion à la fin du n° 20.

Les intégrales (5) ou (10) interviennent dans certaines questions de quelque intérêt; on trouvera des procédés tout différents pour les calculer, ci-après (25, *inf.*) et plus loin (35, *inf.*).

25. Quand une intégrale définie est prise entre des limites infinies (l'une au moins), son développement en série par un tronçonnement indéfini du chemin d'intégration, que nous avons déjà indiqué comme moyen de discussion au n° 242*, II, permet quelquefois aussi d'en calculer la valeur. C'est ce qui a lieu pour l'intégrale (5).

L'égalité évidente

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{-\infty} \frac{\sin(-t)}{-t}\,d(-t) = \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

donne

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

intégrale dont le chemin est constitué par la totalité de l'axe des quantités réelles, parcouru dans le sens où x croît, et que nous allons calculer.

En découpant indéfiniment sur cet axe, et à partir de o, des segments de même longueur π, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \ldots + \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \ldots$$
$$+ \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \ldots,$$

où la série se prolonge à l'infini dans les deux sens. Si l'on opère ensuite, dans le terme général, la substitution $x = m\pi + t$ déjà employée au n° 23, III, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \ldots - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t-\pi}\, dt + \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt - \ldots$$
$$+ (-1)^m \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + m\pi}\, dt + \ldots$$
$$= \int_0^{\pi} \sin t \left(\ldots - \frac{1}{t-\pi} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t+\pi} + \ldots \right) dt$$
$$= \int_0^{\pi} \sin t [\xi_1(t, 2\pi) - \xi_1(t-\pi, 2\pi)]\, dt = \int_0^{\pi} \sin t \frac{1}{\sin t}\, dt = \pi,$$

en reprenant les notations du n° 278** et en ayant égard à la formule établie au n° 282**, IV.

26. Quand on a acquis la certitude qu'une intégrale définie est une fonction olotrope $F(a)$ de quelque paramètre a engagé dans la fonction à intégrer, et qu'ensuite on a réussi à l'exprimer par une fonction olotrope et connue de a, $f(a)$, ne fût-ce seulement que pour des valeurs particulières du même paramètre tombant dans un espace limité, mais en nombre illimité, la différence $F(a) - f(a)$, s'évanouit (4**), et l'on a, par suite, $F(a) = f(a)$, pour *toute* valeur de a intérieure à l'espace dont il s'agit.

Cette observation permet de calculer plusieurs intégrales définies, en particulier *l'intégrale d'Euler*

$$(12) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$$

prise sur la partie positive de l'axe des quantités réelles, et où, pour $x^{a-1} = e^{(a-1)l(x)}$, il faut adopter la détermination réelle de $l(x)$ (212**).

I. *Cette intégrale n'existe pas pour* $a = 0$ *ou* $= 1$ (*à plus forte raison pour* a *réel et* < 0, *ou* > 1); car l'intégrale indéfinie est, dans le premier cas, $l(x) - l(1+x) + C$, fonction infinie pour $\lim x = 0$, et dans le second cas $l(1+x) + C$, fonction infinie pour x infinie.

Mais elle existe quand a *est une quantité réelle comprise entre* 0 *et* 1. Nous le constaterions immédiatement au moyen des lemmes du nº 428**, si nous n'avions ici un intérêt spécial à opérer comme il suit (*Cf.* 242*, I).

Appelons ξ, x_1, x_2, X quatre quantités positives, la première infiniment petite, la seconde invariable et < 1, la troisième invariable aussi mais > 1, la quatrième infinie, et considérons les trois intégrales

$$(13) \qquad \int_\xi^{x_1} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx, \qquad \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx, \qquad \int_{x_2}^{X} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx.$$

Toutes trois existent parce que la fonction à intégrer ne cesse d'être olotrope que pour $x = 0$ (212**), ou $x = -1$, valeurs non situées sur leurs chemins.

Pour $\operatorname{mod} x < 1$, on peut écrire

$$\frac{x^{a-1}}{1+x} = x^{a-1} - x^a + x^{a+1} - \ldots,$$

série évidemment intégrable terme à terme (275*); moyennant quoi, si l'on pose

$$(14) \qquad x^a\left(\frac{1}{a} - \frac{x}{a+1} + \frac{x^2}{a+2} - \ldots\right) = \varphi(x, a),$$

la première intégrale est égale à $\varphi(x_1, a) - \varphi(\xi, a)$; et le second

terme de cette différence tend vers zéro, parce que a est une quantité positive.

Pour $\mathrm{mod}\,x > 1$, on a de même

$$\frac{x^{a-1}}{1+x} = x^{a-2} : \left(1 + \frac{1}{x}\right) = x^{a-2} - x^{a-3} + x^{a-4} - \ldots,$$

série encore intégrable terme à terme. Si donc on pose

$$(15) \qquad x^{a-1}\left(\frac{1}{a-1} - \frac{x^{-1}}{a-2} + \frac{x^{-2}}{a-3} - \ldots\right) = \Phi(x, a),$$

la troisième intégrale est égale à $\Phi(X, a) - \Phi(x_2, a)$, différence dont le premier terme est encore infiniment petit à cause de $a - 1 < 0$.

La somme des trois intégrales ayant ainsi, pour limite, la quantité

$$(16) \qquad \varphi(x_1, a) + \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx - \Phi(x_2, a),$$

l'intégrale artificielle (12) existe bien, ayant précisément cette limite pour valeur.

II. *La valeur* (16) *de notre intégrale est fonction olotrope de a.*

Il en est effectivement ainsi pour l'intégrale figurant dans la somme dont il s'agit; car, sur son chemin et pour toutes valeurs de a, l'expression à intégrer est fonction olotrope de x, a (231*).

Il en est encore ainsi pour le premier terme de cette somme, parce que, dans le premier membre de la relation (14), le premier facteur est fonction indéfiniment olotrope de a pour toute valeur de $x \neq 0$, et que, pour $\mathrm{mod}\,x < 1$, le second facteur est une série de fonctions de a, à laquelle la proposition du n° 273* est applicable toutes les fois que a ne se réduit pas à 0 ou à un entier négatif. Et de même pour le troisième terme de l'expression (16), parce que la série (15) est semblable à la série (14).

III. Quand a est une fraction, la différentielle devient une irrationnelle algébrique dont on peut ramener l'intégrale indéfinie à celle d'une différentielle rationnelle (5). En procédant ainsi, ou bien plus rapidement en employant l'artifice que nous indiquerons

bientôt (32, *inf.*), on trouve alors

$$(17)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi};$$

et, en vertu de l'observation faite au commencement du présent numéro, *cette formule a lieu pour toutes les valeurs de a que nous considérons,* parce que ses deux membres sont fonctions olotropes de a dans l'intervalle réel allant de o à 1 (exclusivement) (II), qui contient des valeurs commensurables de a en nombre illimité, bien qu'il constitue un espace limité.

27. En ajoutant peu de mots aux considérations de l'alinéa II du numéro précédent, on retrouve la formule (17) d'une manière toute différente.

Quand x_1 tend vers 1, $\varphi(x_1, a)$ tend vers $\varphi(1, a)$ parce que la série entre parenthèses dans la relation (14) est entière par rapport à x, ordonnée suivant les puissances croissantes de cette variable, et convergente pour $x=1$ (101*), (126*). On trouve de même $\lim \Phi(x_2, a) = \Phi(1, a)$.

La somme (16) conserve cependant une valeur constante égale à celle de l'intégrale (12); mais comme son terme médian tend alors vers o, il reste

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx &= \varphi(1, a) - \Phi(1, a) = \ldots - \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \ldots\\ &= \xi_1(a, 2) - \xi_1(a-1, 2)\\ &= \frac{2\pi}{2}\left[\xi_1\left(\frac{2\pi}{2}a, 2\pi\right) - \xi_1\left(\frac{2\pi}{2}(a-1), 2\pi\right)\right] \quad (278^{**}, \text{IV}, 5^{o})\\ &= \pi[\xi_1(a\pi, 2\pi) - \xi_1(a\pi - \pi, 2\pi)] = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (282^{**}, \text{IV}).\end{aligned}$$

28. Si n désigne une quantité positive quelconque, la substitution $x = t^{\frac{1}{n}}$, d'où $dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$, donne

$$\int_0^\infty e^{-x^n}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^\infty t^{\frac{1}{n}-1}e^{-t}\,dt = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \quad (431^{**}),$$

les intégrations étant exécutées sur la partie positive de l'axe des quantités réelles, et l'intégrale considérée se trouve immédiatement ramenée à la fonction Γ.

On a en particulier

$$(18) \qquad \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad (440^{**}).$$

Mais cette dernière intégrale, qui se présente dans certaines parties du Calcul des probabilités, peut être encore obtenue par des moyens spéciaux dont voici le plus simple ([1]).

Elle est la limite, pour x infinie, de la fonction

$$f(x) = \int_0^x e^{-u^2}\,du = \int_0^1 x e^{-x^2 v^2}\,dv,$$

cette dernière intégrale résultant de la transformation de la précédente par la substitution $u = xv$, d'où $du = x\,dv$, et l'on a

$$f'(x) = e^{-x^2}.$$

En multipliant membre à membre ces deux relations, puis intégrant par rapport à x sous le signe $\int_0^1$, ce qui est permis puisqu'il porte sur une fonction olotrope de v, x, puisqu'en outre le chemin de l'intégration relative à v est limité, il vient facilement

$$[f(x)]^2 = C - \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+v^2)}}{1+v^2}\,dv,$$

et la quantité C, indépendante de x, est égale à $\frac{\pi}{4}$ à cause de

$$[f(0)]^2 = 0 = C - \int_0^1 \frac{dv}{1+v^2} = C - \text{arc tang}\,1 = C - \frac{\pi}{4} \qquad (219^{**}).$$

On a donc en définitive

$$[f(x)]^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+v^2)}}{1+v^2}\,dv,$$

et, dans cette dernière intégrale, e^{-x^2} est évidemment la valeur maximum que la fonction à intégrer peut acquérir sur le chemin réel conduisant v de 0 à 1. Il en résulte que la valeur de la même intégrale est inférieure à $e^{-x^2}.1$ (237*), qu'elle tend vers zéro

---

([1]) Je dois cette méthode à un correspondant resté anonyme qui a bien voulu me l'envoyer de Toulouse en 1888. Elle ressemble beaucoup à l'artifice classique, mais elle a une rigueur et une netteté qui manquent absolument à celui-ci.

pour x infinie, qu'on a enfin

$$\lim f(x) = +\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

parce que $f(x)$ reste évidemment positive.

29. L'intégrale artificielle

$$(19)\qquad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin x \, dx,$$

prise sur la partie positive de l'axe des quantités réelles, existe. comme on le constaterait sans peine en appliquant le lemme I du n° 428**, ou mieux encore en observant que la fonction à intégrer peut être écrite $l\frac{\sin x}{x} + l(x)$, somme dont la première partie donne une intégrale naturelle et dont la dernière a pour intégrale indéfinie la fonction $x\,l(x) - x$ tendant vers zéro en même temps que x (187**). Son calcul nous montrera la bizarrerie des artifices à employer quelquefois dans les questions de ce genre.

En y faisant les substitutions successives $x = \frac{\pi}{2} - t$ et $t = x$, il vient

$$(20)\qquad I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} l \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cos x \, dx,$$

d'où, en ajoutant membre à membre (19) et (20),

$$(21)\qquad \begin{cases} 2I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} l[\sin x \cos x]\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[l\left(\frac{1}{2}\right) + l \sin 2x \right] dx \\ \quad = \displaystyle\frac{\pi}{2}\, l\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin 2x \, dx. \end{cases}$$

La substitution $x = \frac{t}{2}$ change cette dernière intégrale en

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} l \sin t \, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin t \, dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} l \sin t \, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin t \, dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} l \sin u \, du,$$

et la seconde de celles-ci reproduit la première par la substitution $u = \pi - t$. On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} l \sin t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin t \, dt = \mathrm{I},$$

moyennant quoi la relation (21) devient

$$2\mathrm{I} = \frac{\pi}{2} l\left(\frac{1}{2}\right) + \mathrm{I},$$

d'où finalement

$$\mathrm{I} = \frac{\pi}{2} l\left(\frac{1}{2}\right). \tag{22}$$

Applications variées de la relation existant, relativement à un même contour fermé, entre l'intégrale définie d'une fonction méromorphe et son résidu intégral.

30. Après avoir établi le théorème de Cauchy du n° 189**, nous avons dit qu'il permet de calculer facilement un grand nombre d'intégrales définies; maintenant nous avons à faire connaître le mécanisme de sa mise en œuvre, en produisant les types principaux des applications dont il est susceptible.

En prenant d'abord pour l'aire S celle d'un cercle de rayon R ayant l'origine O_x pour centre, la substitution $x = \mathrm{R}e^{it}$, d'où $dx = \mathrm{R}ie^{it}dt$ change la formule (29) du numéro cité en

$$\int_0^{2\pi} f(\mathrm{R}e^{it})e^{it}\,dt = \frac{2\pi}{\mathrm{R}} \mathop{\mathcal{E}}_{\mathrm{S}} f(x),$$

où l'intégration s'opère de $t = 0$ à $t = 2\pi$ sur la partie positive de l'axe des quantités réelles; effectivement, it marche alors de 0 à $2\pi i$ sur l'axe des quantités imaginaires, et $x = \mathrm{R}e^{it}$ exécute à partir de $x = \mathrm{R}$ une révolution directe sur la circonférence considérée (201**, V). Les éléments de la fonction placée maintenant sous le signe d'intégration sont deux fonctions réelles de t; en les séparant, puis en égalant les éléments de mêmes noms dans les deux membres, on obtient une paire de formules que

l'indétermination de la fonction $f(x)$ permet de multiplier indéfiniment.

Soit, par exemple, $a = a' + ia''$ une quantité non nulle quelconque, et prenons $f(x) = \frac{1}{x(x+a)}$; la relation précédente devient (236**)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\mathrm{R}\cos t + a') + i(\mathrm{R}\sin t + a'')} = 2\pi \mathop{\mathcal{E}}_{\mathrm{S}} f(x).$$

Quand R est $<$ mod a, $f(x)$ a dans le cercle S l'infini unique $x = 0$, auquel correspond le résidu $\frac{1}{a} = \frac{1}{a' + ia''}$; l'égalisation des éléments homonymes donne donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\mathrm{R}\cos t + a')\,dt}{\mathrm{R}^2 + a'^2 + a''^2 + 2\mathrm{R}(a'\cos t + a''\sin t)} = \frac{2\pi a'}{a'^2 + a''^2},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\mathrm{R}\sin t + a'')\,dt}{\mathrm{R}^2 + a'^2 + a''^2 + 2\mathrm{R}(a'\cos t + a''\sin t)} = \frac{2\pi a''}{a'^2 + a''^2}.$$

Quand R est $>$ mod a, $f(x)$ a dans le cercle S les deux infinis 0, $-a$ donnant des résidus dont la somme est nulle, et les seconds membres de ces deux formules doivent être remplacés par zéro.

On remarquera la discontinuité de ces trois intégrales considérées comme fonctions des paramètres a', a''. Elle tient à ce que, pour des valeurs réelles de ces quantités donnant $a'^2 + a''^2 = \mathrm{R}^2$, t prend sur le chemin d'intégration quelque valeur annulant $\mathrm{R}\cos t + a'$, $\mathrm{R}\sin t + a''$ à la fois, faisant ainsi entrer dans des phases singulières les fonctions à intégrer et, par suite, les intégrales elles-mêmes.

31. Les formules particulières qu'on peut déduire de ce théorème de Cauchy en sont rarement aussi rapprochées que les précédentes, et beaucoup d'entre elles s'appuient en outre sur ce lemme très simple :

Soient [C] *un chemin d'intégration limité, invariable (ou même variable), et $f_n(x)$ une fonction de nature variable avec la valeur de l'indice infini n, mais qui y est olotrope quel que soit cet indice. S'il est possible de partager ce chemin en tronçons variables, les uns en nombre i_n,*

$$[\mathrm{T}'_n],\quad [\mathrm{T}''_n],\quad \ldots,\quad [\mathrm{T}^{(i_n)}_n]$$

et de longueurs (finies) $T'_n, T''_n, \ldots, T_n^{(i_n)}$, *sur lesquels* $\operatorname{mod} f_n(x)$ *reste inférieur à quelque quantité positive infiniment petite* φ_n, *les autres en nombre* j_n *également fini,*

$$[t'_n], [t''_n], \ldots, [t_n^{(j_n)}],$$

de longueurs $t'_n, t''_n, \ldots, t_n^{(j_n)}$ *toutes infiniment petites, sur lesquels* $\operatorname{mod} f_n(x)$ *reste inférieur à des quantités positives* Φ'_n, $\Phi''_n, \ldots, \Phi_n^{(j_n)}$ *invariables ou telles, tout au moins, que les produits* $\Phi'_n t'_n, \ldots, \Phi_n^{(j_n)} t_n^{(j_n)}$ *soient tous infiniment petits, l'intégrale définie*

$$\int f_n(x)\,dx$$

prise sur le chemin [C] *est certainement infiniment petite.*

La décomposition de l'intégrale en parties correspondantes à tous ces tronçons, combinée avec l'observation générale du n° 237*, montre immédiatement que son module est inférieur à

$$\varphi_n T'_n + \varphi_n T''_n + \ldots + \varphi_n T_n^{(i_n)} + \Phi'_n t'_n + \Phi''_n t''_n + \ldots + \Phi_n^{(j_n)} t_n^{(j_n)};$$

somme d'un nombre fini de termes dont chacun est, par hypothèse, une quantité infiniment petite.

32. Comme premier exemple, nous prendrons le calcul de l'intégrale (12) du n° 26 pour les valeurs commensurables du paramètre a.

I. En appelant $\mu < \nu$ deux entiers positifs quelconques, la substitution $x = t^\nu$, d'où $dx = \nu t^{\nu-1}\,dt$, donne d'abord

$$(1)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{\frac{\mu}{\nu}-1}}{1+x}\,dx = \nu \int_0^\infty \frac{t^{\mu-1}}{1+t^\nu}\,dt$$

et l'intégration, qui intéresse maintenant une différentielle rationnelle, est toujours à exécuter sur la partie positive de l'axe des quantités réelles.

II. La fonction méromorphe de t qu'il faut intégrer a pour infinis, tous simples, les racines de l'équation binôme

$$t^\nu = -1 = e^{\pi i},$$

c'est-à-dire les ν quantités

$$\beta = e^{\frac{\pi i}{\nu}}, \quad e^{\frac{\pi i}{\nu}+\frac{2\pi i}{\nu}}, \quad \ldots, \quad e^{\frac{\pi i}{\nu}+(\nu-1)\frac{2\pi i}{\nu}} \quad (197^{**}), (109^{**}, \text{IV}), (201^{**}, \text{VI}),$$

dont la première β tombe seule évidemment à l'intérieur de l'angle compris entre la partie positive de l'axe des quantités réelles et la demi-droite allant de l'origine $t = 0$ à $t = e^{\frac{2\pi i}{\nu}} = \beta^2$, racine principale directe $\nu^{\text{ième}}$ de l'unité (*loc. cit.*).

Si donc, appelant τ quelque quantité positive, on construit un premier contour fermé $[c]$ avec les trois segments rectilignes ayant pour extrémités : le premier, les points $t = 0$, $t = \tau$, le second, les points $t = \tau$, $t = \beta^2\tau$, le troisième, les points $t = \beta^2\tau$, $t = 0$, un deuxième contour fermé $[C]$, homothétique au précédent par rapport à l'origine O_t avec un rapport de similitude infini ρ, finit évidemment par contenir cette racine β, mais aucune autre avec elle. Par suite (189**) l'intégration de notre différentielle, faite sur ce dernier dans le sens direct, donnera

$$\int \frac{t^{\mu-1}}{1+t^\nu}\,dt = 2\pi i \mathop{\mathcal{E}}_{\beta} \frac{t^{\mu-1}}{1+t^\nu} = 2\pi i \left[\frac{(t-\beta)t^{\mu-1}}{t^\nu+1}\right]_{t=\beta}$$
$$= \frac{2\pi i}{\nu}\beta^{\mu-\nu} = -\frac{2\pi i}{\nu}\beta^\mu,$$

à cause de $\beta^\nu = e^{\pi i} = -1$, puis, par la décomposition de $[C]$ en parties homologues à celles de $[c]$ énumérées tout à l'heure,

$$(2)\quad \int_0^{\rho\tau} \frac{t^{\mu-1}}{1+t^\nu}\,dt + \int_{\rho\tau}^{\beta^2\rho\tau} \frac{t^{\mu-1}}{1+t^\nu}\,dt + \int_{\beta^2\rho\tau}^{0} \frac{t^{\mu-1}}{1+t^\nu}\,dt = -\frac{2\pi i}{\nu}\beta^\mu.$$

III. Dans cette relation, la première intégrale tend évidemment vers I, valeur de celle qui figure dans le second membre de la transformation (1). La troisième tend vers $-\beta^{2\mu}$I, car la substitution $t = \beta^2 s$, d'où $dt = \beta^2 ds$, la change en

$$\int_{\rho\tau}^{0} \frac{(\beta^2 s)^{\mu-1}}{1+(\beta^2 s)^\nu}\beta^2\,ds = -\beta^{2\mu}\int_0^{\rho\tau} \frac{s^{\mu-1}}{1+s^\nu}\,ds.$$

Quant à la seconde elle est infiniment petite : effectivement la substitution $t = \rho s$, d'où $dt = \rho\, ds$ la change en

$$\int_{\tau}^{\beta^2\tau} \frac{\rho^\mu s^{\mu-1}}{1+\rho^\nu s^\nu}\,ds.$$

qui est telle, parce que le chemin d'intégration est précisément le segment rectiligne invariable conduisant de $s = \tau$, à $s = \beta^2\tau$, sur lequel, à cause de $\mu < \nu$ et parce que s n'y prend jamais la valeur zéro, le module de la fonction de s, placée sous le signe, reste évidemment inférieur à quelque quantité positive tendant vers zéro (237*).

A la limite, la relation (2) donne donc

$$(1 - \beta^{2\mu})\mathrm{I} = -\frac{2\pi i}{\nu}\beta^{\mu},$$

d'où (231**)

$$\mathrm{I} = \frac{\pi}{\nu} : \frac{\beta^{\mu} - \beta^{-\mu}}{2i} = \frac{\pi}{\nu} : \frac{e^{i\frac{\mu}{\nu}\pi} - e^{-i\frac{\mu}{\nu}\pi}}{2i} = \frac{1}{\nu}\,\frac{\pi}{\sin\frac{\mu}{\nu}\pi},$$

valeur dont le report dans la transformation (1) donne bien la formule (17) du n° 26 pour le cas considéré.

33. Nous passons au calcul d'intégrales définies dont les différentielles rentrent dans la forme générale étudiée au n° 17.

En appelant b une constante réelle $\neq 0$, $\mathrm{F}(x)$, $f(x)$ deux polynômes entiers dont le degré effectif μ du second surpasse celui du premier, l'intégrale artificielle

$$\int_{x_0}^{\pm\infty} \frac{\mathrm{F}(x)}{f(x)} e^{ibx}\,dx,$$

prise sur un segment infini de l'axe des quantités réelles qui ne contient aucun zéro du dénominateur $f(x)$, existe toujours.

Car si le degré effectif de $\mathrm{F}(x)$ est $\leqq \mu - 2$, il résulte immédiatement de la réalité de la constante b que, pour x infinie positivement ou négativement, le produit de la fonction à intégrer par x^2, puissance de x dont l'exposant surpasse 1, est fini (428**, II).

Si, le même degré étant $= \mu - 1$, on a, par exemple,

$$f(x) = a_{\mu}x^{\mu} + a_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots, \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{A}_{\mu-1}x^{\mu-1} + \mathrm{A}_{\mu-2}x^{\mu-2} + \ldots,$$

avec $a_{\mu} \neq 0$, $\mathrm{A}_{\mu-1} \neq 0$, on divisera le chemin d'intégration, s'il y a lieu, en deux parties, l'une limitée contenant le point $x = 0$, l'autre illimitée ne le contenant pas; puis, en se bornant comme

de raison à la considération de l'intégrale partielle afférente à ce chemin, on prendra $H = A_{\mu-1} : a_\mu$, et en écrivant

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{H}{x} + \frac{(A_{\mu-2} - H a_{\mu-1})x^{\mu-1} + \dots}{x(a_\mu x^\mu + \dots)},$$

on décomposera cette intégrale partielle en deux autres dont la seconde existe certainement par ce qui précède puisque, dans la fraction rationnelle correspondante, le degré effectif du dénominateur surpasse de deux unités au moins celui du numérateur.

Quant à la première, elle existe aussi; car, au facteur constant H près, elle est

$$(3)\qquad \int_{x_0}^{\pm\infty} \frac{e^{ibx}}{x}\,dx = \int_{x_0}^{\pm\infty} \frac{\cos bx}{x}\,dx + i\int_{x_0}^{\pm\infty} \frac{\sin bx}{x}\,dx,$$

et les substitutions $x = \pm\frac{1}{b}\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$, $x = \pm\frac{t}{b}$ font rentrer ces dernières (au signe près) dans la classe de celles dont nous avons démontré l'existence au n° 23, III.

De cette discussion résulte l'existence constante de l'intégrale considérée, dont la valeur est fournie par la formule suivante.

Quand $f(x)$ n'a aucun zéro réel, on a

$$(4)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{f(x)} e^{ibx}\,dx = \pm 2\pi i \mathop{\mathcal{E}}_x \frac{F(x)e^{ibx}}{f(x)},$$

où il faut intégrer sur la totalité de l'axe des quantités réelles, puis, si $b > 0$, adopter le signe + en étendant le résidu aux seuls zéros de $f(x)$ dont les seconds éléments sont positifs, ou bien, si $b < 0$, faire tout le contraire.

Pour fixer les idées, nous supposerons $b > 0$; nous appellerons ξ, η deux quantités positives invariables, $[c]$ le périmètre du rectangle ayant pour sommets les points $x_1 = -\xi$, $x_2 = +\xi$, $x_3 = \xi + i\eta$, $x_4 = -\xi + i\eta$, et $[C]$ le périmètre du rectangle homothétique à celui-ci par rapport à l'origine O_x avec un rapport de similitude infini ρ. La fonction à intégrer étant indéfiniment méromorphe, et le contour $[C]$ finissant par envelopper exclusivement tous ceux de ses infinis [ce sont les zéros de $f(x)$] dont les seconds éléments sont positifs, une intégration directe

exécutée sur lui donnera (189**)

$$(5) \qquad \int \frac{F(x)}{f(x)} e^{ibx}\,dx = +2\pi i \mathcal{E}_x \frac{F(x)e^{ibx}}{f(x)},$$

où le calcul des résidus intéresse seulement les infinis en question.

La décomposition du rectangle [C] en ses quatre côtés donne ensuite

$$(6) \quad \int_{\rho x_1}^{\rho x_2} \frac{F(x)}{f(x)} e^{ibx}\,dx + \int_{\rho x_2}^{\rho x_3} + \int_{\rho x_3}^{\rho x_4} + \int_{\rho x_4}^{\rho x_1} = +2\pi i \mathcal{E} \frac{F(x)e^{ibx}}{f(x)}.$$

De ces quatre nouvelles intégrales, la première a évidemment pour limite celle que nous cherchons; la formule (4) sera donc établie quand nous aurons prouvé que chacune des trois autres tend vers zéro.

A cet effet, nous les transformerons par la substitution $x = \rho t$, d'où $dx = \rho\,dt$, en

$$(7) \qquad \int_{x_2}^{x_3} \mathfrak{f}(\rho, t)\,dt, \quad \int_{x_3}^{x_4} \mathfrak{f}(\rho, t)\,dt, \quad \int_{x_4}^{x_1} \mathfrak{f}(\rho, t)\,dt,$$

où nous avons posé pour abréger

$$\mathfrak{f}(\rho, t) = \frac{\rho F(\rho t)}{f(\rho t)} e^{ib\rho t},$$

et les intégrations s'opèrent maintenant respectivement sur les trois côtés du rectangle fixe [c], qui n'appartiennent pas à l'axe des quantités réelles.

Comme le côté $[x_3 x_4]$ de ce rectangle ne contient pas la valeur $t = 0$, le module du premier facteur de $\mathfrak{f}(\rho, t)$ y reste inférieur à quelque quantité positive invariable, car c'est une fraction rationnelle en ρ dont le degré effectif du numérateur ne surpasse pas celui du dénominateur. Quant au second facteur, il y reste inférieur à quelque quantité infiniment petite; car, en posant $t = t' + it''$, son module est constamment égal à $e^{-b\rho t''} = e^{-b\rho\eta}$, quantité infiniment petite puisque b, ρ, η sont trois quantités positives dont la seconde est infinie. La seconde des intégrales (7) est donc infiniment petite puisque, d'autre part, elle est prise sur un chemin limité (237*).

Pour discuter la première, nous appellerons τ'' une quantité

positive infiniment petite rendant néanmoins infini le produit $\rho\tau''$ $\left(\text{par exemple, on pourra faire } \tau'' = \rho^{-\frac{1}{2}}\right)$, nous poserons $\mathfrak{t} = \xi + i\tau''$, quantité qui tend vers $\xi = x_2$, et nous décomposerons son chemin d'intégration en deux tronçons, l'un $[x_2 \mathfrak{t}]$ de longueur infiniment petite, l'autre $[\mathfrak{t}\ x_3]$ de longueur finie (tendant vers celle du côté $[x_2 x_3]$). Sur le premier tronçon, le module de la fonction à intégrer reste inférieur à quelque quantité positive invariable; car celui de son premier facteur est tel pour une cause déjà invoquée dans la discussion de la première intégrale, et celui de son second facteur $= e^{-b\rho t''}$ est $\leqq 1$ à cause de $t'' \geqq 0$, d'où $-b\rho t'' \leqq 0$. Mais sur le second tronçon, le même module reste inférieur à quelque quantité infiniment petite; car le module du premier facteur de $\mathfrak{f}(\rho, t)$ est fini comme tout à l'heure, et, à cause de $0 < \tau'' \leqq t''$, celui du second facteur $e^{ib\rho t}$, égal à $e^{-b\rho t''}$, est $< e^{-b\rho\tau''}$ où le produit $\rho\tau''$ est infini positif. Cette première intégrale est donc infiniment petite (31), et l'on prouverait de même qu'il en est ainsi pour la dernière du groupe (7).

34. Comme application, considérons l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{1+x^2}\, dx,$$

et supposons $b > 0$. Le seul infini de la fonction à intégrer dont le second élément soit positif est $x = i$ auquel correspond le résidu $\frac{e^{-b}}{2i}$. La formule (4) donne donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-b}.$$

Elle donne aussi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ibx}}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-b}.$$

En ajoutant puis en retranchant membre à membre, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos bx}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-b}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin bx}{1+x^2}\, dx = 0.$$

On trouvera de la même manière

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos bx}{1+x^2}\, dx = 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin bx}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-b}.$$

Etc.

35. Quand le polynôme $f(x)$ a des zéros réels, l'intégrale artificielle dont nous nous occupons devient infinie ou indéterminée; mais la considération de sa *valeur principale* (244*), quand elle existe, permet de conserver la formule (4) en y faisant toutefois quelques modifications.

Comme la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ est entièrement résoluble en fractions simples, et comme le dénominateur de chacune de celles-ci peut être immédiatement réduit à une puissance de la variable, la discussion se limite à celle de groupes d'intégrales de la forme

$$\ldots + A_\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{x^\mu}\, dx + \ldots,$$

où $\ldots, \mu, \ldots$ sont des entiers positifs et $\ldots, A_\mu, \ldots$ des constantes. Nous étudierons seulement le cas d'un groupe de ce genre constitué par l'intégrale unique

$$(8) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{x}\, dx \quad (b > 0),$$

les autres n'offrant après celui-ci pas plus de difficulté que d'intérêt.

Nous appellerons ε une quantité positive infiniment petite, $[l]$ un fragment d'anneau dont le parcours conduit de $x = -\varepsilon$ à $x = +\varepsilon$ par une demi-révolution rétrograde autour de l'origine O_x et nous intégrerons en marchant de l'infini négatif à $-\varepsilon$ sur l'axe des quantités réelles, puis de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$ sur la ligne $[l]$, puis enfin de $+\varepsilon$ à l'infini positif sur le même axe. Un raisonnement identique à celui du n° 33 donne alors

$$(9) \quad \int \frac{e^{ibx}}{x}\, dx = 0 = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ibx}}{x}\, dx + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{e^{ibx}}{x}\, dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{x}\, dx,$$

parce que la fonction à intégrer n'a aucun infini dont le second élément soit positif.

Le développement

$$\frac{e^{ibx}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{ib}{1} + \frac{i^2 b^2}{1.2} x + \ldots$$

conduisant à

$$(10) \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{e^{ibx}}{x}\, dx = \Delta l(x) + \frac{ib}{1} \frac{\varepsilon - (-\varepsilon)}{1} + \frac{i^2 b^2}{1.2} \frac{\varepsilon^2 - (-\varepsilon)^2}{2} + \ldots,$$

où tous les termes sont soit nuls, soit infiniment petits avec ε, à l'exception du premier qui conserve la valeur constante $-\pi i$ parce que la ligne [l] équivaut à une demi-circonférence de sens rétrograde ayant l'origine O_x pour centre (186** *bis*), on voit que dans le dernier membre de la relation (9) l'intégrale moyenne tend vers $-\pi i$, que par suite la somme des intégrales extrêmes tend vers la limite πi.

En d'autres termes, on a

$$\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{x}\, dx \right\} = \pi i,$$

les accolades indiquant qu'il s'agit de la valeur principale de l'intégrale (8) (244*), et l'on trouve de la même manière

$$\left\{ \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{e^{-ibx}}{x}\, dx \right\} = -\pi i.$$

En ajoutant et retranchant membre à membre, il vient

$$\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos bx}{x}\, dx \right\} = 0, \qquad \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin bx}{x}\, dx \right\} = \pi.$$

Dans cette dernière formule on peut évidemment enlever les accolades, parce que, la fonction à intégrer étant devenue olotrope en $x = 0$, l'intégrale n'est plus artificielle de ce chef; elle équivaut alors à la formule (5) du n° 23, que nous avons trouvée déjà de deux autres manières (*loc. cit.*), (25).

36. Jusqu'ici nous avons supposé $b \neq 0$. Quand on a au contraire $b = 0$, la formule (4) perd presque tout son intérêt parce que la différentielle devient rationnelle; mais, pour épuiser la

question, il convient d'examiner en quelques mots ce qui se passe alors.

Si le degré effectif de $f(x)$ surpasse celui de $F(x)$ de deux unités au moins, l'intégrale considérée existe toujours comme nous l'avons reconnu, et la formule (4) subsiste sans autre modification que la possibilité d'y prendre le signe $+$ en étendant le résidu aux zéros de $f(x)$ à seconds éléments positifs, ou bien le signe —, en considérant les zéros à seconds éléments négatifs, l'une ou l'autre chose à volonté.

Si le premier degré surpasse le deuxième d'une unité seulement, l'intégrale n'existe plus, parce que l'intégrale partielle (3) intervient forcément à cause de $H \neq 0$, et qu'on a

$$\int \frac{dx}{x} = l(x) + C,$$

fonction infinie pour x infinie. Mais alors la formule (4) subsiste à condition de substituer à son premier membre la limite vers laquelle tend celui de la relation (5) (toujours pour ρ infini).

Dans la relation équivalente (6), la somme des trois dernières intégrales du premier membre est évidemment

$$(11) \qquad \int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx,$$

cette dernière étant prise sur une ligne conduisant de X quantité positive infinie à $-X$ par une demi-révolution de sens direct autour de l'origine O_x. Comme pour x infinie, on finit par avoir

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_{\mu-1}}{a_\mu}\,\frac{1}{x} + A_2\,\frac{1}{x^2} + \ldots \qquad (50^{**}, \text{II}),$$

un raisonnement semblable à celui déjà employé pour discuter l'intégrale (8) montre que l'intégrale (11) tend vers $\frac{A_{\mu-1}}{a_\mu}\pi i$ (186** *bis*). On en conclut que la première intégrale de la relation (6) tend aussi vers une limite. La formule (4) subsiste donc en retranchant $\frac{A_{\mu-1}}{a_\mu}\pi i$ de son second membre et en écrivant

$$(12) \qquad \lim \int_{-X}^{+X} \frac{F(x)}{f(x)}\,dx$$

à la place de l'intégrale indéterminée figurant dans son premier

membre, dont cette quantité (12) peut ainsi être considérée comme une sorte de *valeur principale*.

Ceci suppose toujours les zéros de $f(x)$ tous imaginaires; si quelques-uns étaient réels, il y aurait à combiner ces considérations avec celle du numéro précédent; mais ce sont là des détails du plus mince intérêt.

37. Les procédés de calculs dérivés du théorème fondamental de Cauchy sont praticables aussi dans des cas où la fonction à intégrer entre dans des phases singulières variées sur le chemin d'intégration. Pour en donner un premier exemple, nous les emploierons à retrouver la valeur de l'intégrale d'Euler (26) par des moyens tout différents de ceux qui nous l'ont déjà procurée (*loc. cit.*), (27).

Nous appellerons ξ, X deux quantités positives, la première infiniment petite, la seconde infinie, et nous construirons un contour fermé variable [C] en soudant bout à bout : 1° le segment [ξX] de l'axe des quantités réelles; 2° une ligne fermée [L] ayant tous ses points infiniment éloignés de l'origine O_x et conduisant de X à X par une révolution directe autour de la même origine; 3° le segment [Xξ] géométriquement égal au précédent, mais à parcourir en sens contraire; 4° une ligne fermée [l] ayant tous ses points infiniment voisins de O_x et conduisant de ξ à ξ par une révolution rétrograde autour de cette origine.

A l'intérieur du contour [C] la fonction à intégrer

$$f(x) = \frac{x^{a-1}}{1+x}$$

est constamment méromorphe parce que le dénominateur est entier et que le numérateur ne cesse d'être olotrope qu'au point $x = 0$ qui lui est extérieur (212**); en outre elle finit évidemment par y avoir le seul infini simple $x = -1$. L'intégration faite dans le sens direct sur ce contour découpé en ses quatre tronçons ci-dessus énumérés donne donc

$$(13)\quad \int_{\xi}^{X} f(x)\,dx + \int_{X}^{X} f(x)\,dx + \int_{X}^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{\xi} f(x)\,dx = 2\pi i \mathop{\mathcal{E}}_{x=-1} f(x).$$

La première de ces intégrales partielles a évidemment pour limite celle d'Euler dont nous cherchons la valeur.

La troisième est égale à la première multipliée par $-e^{(a-1)2\pi i}$. Effectivement $f(x) = (1+x)^{-1}x^{a-1} = (1+x)^{-1}e^{(a-1)l(x)}$ partant de $x=\xi$, au début de toute l'intégration, avec la valeur initiale $(1+\xi)^{-1}e^{(a-1)l(\xi)}$, où par hypothèse $l(\xi)$ est réel, arrive en $x = X$ après le parcours de segment $[\xi X]$ avec la valeur $(1+X)^{-1}e^{(a-1)l(X)}$, où $l(X)$ est forcément réel encore. Comme le parcours de la ligne fermée [L] est une révolution directe autour de l'origine, il change $l(X)$ en $l(X)+2\pi i$ (173**), (180**), (183**), et par suite $f(X) = (1+X)^{-1}e^{(a-1)l(X)}$ en $e^{(a-1)2\pi i}f(X)$; en partant de X pour revenir en x sur le segment $[X\xi]$, la fonction à intégrer qui part aussi de $e^{(a-1)2\pi i}f(X)$ atteint donc la valeur $e^{(a-1)2\pi i}f(x)$ dont le dernier facteur est la valeur que la même fonction avait prise au point x lors du calcul de la première intégrale partielle. En d'autres termes, la troisième intégrale est ce que devient la première quand on y multiplie la fonction sous le signe par la constante $e^{(a-1)2\pi i}$ et qu'on en renverse les limites, c'est-à-dire quand on multiplie cette première intégrale par $e^{(a-1)2\pi i}$ puis par -1.

La quatrième intégrale et la deuxième tendent vers 0, comme on s'en assure immédiatement en les calculant au moyen des séries (14) et (15) du n° 26.

Quant au résidu, il est la valeur atteinte par le produit

$$(x+1)f(x) = e^{(a-1)l(x)}$$

au bout de quelque chemin tracé de $x=\xi$, par exemple, à $x=-1$ à l'*intérieur* du contour général [C]. Ce chemin, exécutant une demi-révolution directe autour de l'origine, conduit nécessairement $l(x)$, de $l(\xi)$ à la détermination πi de $l(-1)$ (186** *bis*), ce qui assigne au résidu la valeur $e^{(a-1)\pi i}$.

De toute cette discussion il résulte qu'en représentant par E l'intégrale d'Euler cherchée, la relation (13) donne à la limite

$$(1-e^{(a-1)2\pi i})\mathrm{E} = 2\pi i e^{(a-1)\pi i},$$

ou bien, en ayant égard à $e^{2\pi i}=1$, $e^{-\pi i}=-1$,

$$(e^{a\pi i}-e^{-a\pi i})\mathrm{E} = 2i\pi,$$

résultat équivalent à la formule (17) du n° 26.

38. Un dernier exemple nous sera fourni par un nouveau pro-

cédé pour calculer l'intégrale définie, déjà considérée au n° 29.

De l'origine O_x pour centre, nous décrirons une circonférence de rayon 1 sur laquelle nous prendrons deux valeurs de x, infiniment voisines de la valeur particulière $x = 1$, savoir x_1, x_2, ayant leurs seconds éléments positif et négatif respectivement. Nous appellerons [L] l'arc qu'il faut parcourir sur cette circonférence, pour marcher de x_1 à x_2 dans le sens de rotation direct, puis [l] une ligne de longueur infiniment petite, tracée de x_2 à x_1 de manière à avoir tous ses points à l'intérieur de la circonférence, puis enfin [c] le contour fermé direct, résultant de la soudure des lignes [L], [l].

La fonction $\frac{l(1-x)}{x}$, où le logarithme est précisé par la condition initiale $l(1-x) = 0$ pour $x = 0$, est olotrope à l'intérieur du contour [c] puisque $+1$, seule valeur de x singulière pour $l(1-x)$, n'y tombe pas, et qu'en $x = 0$, $\frac{l(1-x)}{x} = -\frac{1}{1} - \frac{x}{2} - \ldots$ est olotrope. En intégrant donc sur le contour [c], décomposé en ses deux tronçons, il vient

$$(14) \qquad \int_{x_1}^{x_2} \frac{l(1-x)}{x}\,dx + \int_{x_2}^{x_1} \frac{l(1-x)}{x}\,dx = 0.$$

La dernière intégrale partielle est infiniment petite; car en posant $x = 1 - t$, d'où $dx = -dt$, puis $t_2 = 1 - x_2$, $t_1 = 1 - x_1$, elle prend la forme

$$-\int_{t_2}^{t_1} \frac{l(t)}{1-t}\,dt,$$

où t_2, t_1 sont des quantités infiniment petites, et où le chemin d'intégration, superposable à la ligne [l], est de longueur infiniment petite aussi.

En remplaçant ensuite $\frac{1}{1-t}$ par $1 + \frac{t}{1-t}$ et ayant égard à

$$\int l(t)\,dt = tl(t) - t + C,$$

nous écrirons

$$\int_{t_2}^{t_1} \frac{l(t)}{1-t}\,dt = t_2 - t_1 + \Delta[tl(t)] + \int_{t_2}^{t_1} \frac{tl(t)}{1-t}\,dt.$$

Or, premièrement, l'intégrale du second membre est infiniment petite parce que le chemin d'intégration est tel et que, à cause de $\lim[tl(t)] = 0$ pour $\lim t = 0$ (187**), on peut assigner sur ce

chemin une limite supérieure finie, et même infiniment petite au module de la fonction à intégrer; deuxièmement, les termes t_2, $-t_1$ le sont d'eux-mêmes; enfin $\Delta[tl(t)] = t_1 l(t_1) - t_2 l(t_2)$ l'est aussi pour la cause ci-dessus et parce que le chemin conduisant de t_2 à t_1 ne peut exécuter même une seule révolution complète autour du point $t = 0$.

A la limite, la relation (14) donne donc

$$\int_1^1 \frac{l(1-x)}{x}\,dx = 0,$$

l'intégration étant faite de $x = 1$, à $x = 1$ sur la totalité de notre circonférence parcourue dans le sens direct.

La substitution $x = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (236**), d'où $dx = ie^{i\theta}\,d\theta$, change cette égalité en

$$(15)\qquad \int_0^{2\pi} l(1-\cos\theta - i\sin\theta)\,d\theta = 0,$$

parce que $x = e^{i\theta}$ parcourt le chemin d'intégration précédent quand θ croît de 0 à 2π (201**, V); et celle-ci donne en particulier

$$(16)\qquad \int_0^{2\pi} l(2-2\cos\theta)\,d\theta = 0,$$

parce que la partie réelle de l'intégrale (15) s'obtient en réduisant le logarithme à sa partie réelle, c'est-à-dire au logarithme réel de

$$\operatorname{mod}(1-\cos\theta - i\sin\theta) = [(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta]^{\frac{1}{2}} = (2-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \quad (178^{**}),$$

et par suite à $\frac{1}{2}\,l(2-2\cos\theta)$.

Comme on a $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, d'où

$$l(2-2\cos\theta) = l\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = 2\left[l(2) + l\sin\frac{\theta}{2}\right],$$

la formule (16) donne

$$\int_0^{2\pi}\left[l(2) + l\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]d\theta = 2\pi l(2) + \int_0^{2\pi} l\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta = 0.$$

Il vient ensuite en posant $\theta = 2\tau$, d'où $d\theta = 2\,d\tau$,

$$\int_0^{2\pi} l\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta = 2\int_0^{\pi} l(\sin\tau)\,d\tau,$$

puis

$$\int_0^{\pi} l(\sin\tau)\,d\tau = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\sin\tau\,d\tau + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} l\sin\tau\,d\tau = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\sin\tau\,d\tau,$$

parce que la substitution $\tau = \pi - \zeta$, d'où $d\tau = -d\zeta$, donne

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} l\sin\tau\,d\tau = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} l\sin\zeta\,d\zeta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\sin\zeta\,d\zeta.$$

Par tout ce qui précède on est immédiatement ramené à la formule (22) du n° 29.

39. Certaines intégrales définies que le théorème de Cauchy ne permet pas de calculer directement peuvent néanmoins, par son emploi, être ramenées à d'autres déjà obtenues par des moyens différents. Telles sont les intégrales réelles, dites *de Fresnel*,

$$U = \int_0^{\infty} \cos x^2\,dx, \qquad V = \int_0^{\infty} \sin x^2\,dx,$$

ayant pour chemin commun la partie positive de l'axe des quantités réelles, et dont nous allons déduire ainsi la valeur de la formule (18) du n° 28.

La racine principale directe $8^{\text{ième}}$ de l'unité,

$$\alpha = \alpha' + i\alpha'' = \Phi(\tfrac{1}{8}) \qquad (113^{**}),$$

est une racine carrée de $i = \Phi(\frac{1}{4})$ à cause de

$$\Phi(\tfrac{1}{8})^2 = \Phi(2\tfrac{1}{8}) = \Phi(\tfrac{1}{4}) \qquad (91^{**});$$

ses éléments α', α'' sont des quantités positives, parce que ceux de $\Phi(\mu)$ sont tels pour $\mu < \frac{1}{4}$ (101^{**}, IV); on a de plus $\alpha' = \alpha'' = \frac{\sqrt{2}}{2}$ à cause de $(\alpha' + i\alpha'')^2 = \alpha'^2 - \alpha''^2 + 2i\alpha'\alpha'' = i$, d'où $\alpha'^2 - \alpha''^2 = 0$, $2\alpha'\alpha'' = 1$, puis $\alpha'^2 = \frac{1}{2}$. Cela posé, nous composerons un contour fermé avec les segments rectilignes conduisant de $x = 0$ à $x = \alpha'$, puis de $x = \alpha'$ à $x = \alpha$, puis de $x = \alpha$ à $x = 0$, et nous appellerons $[c]$ un contour homothétique à celui-ci par rapport à l'origine O_x, construit avec un rapport de similitude ρ infini.

Comme e^{-x^2} est une fonction indéfiniment olotrope, l'intégrale $\int e^{-x^2}dx$ prise sur le contour $[c]$ est nulle; d'où l'on conclut en décomposant ce chemin en ses trois tronçons rectilignes

$$(17) \qquad \int_0^{\rho\alpha'} e^{-x^2}\,dx + \int_{\rho\alpha'}^{\rho\alpha} e^{-x^2}\,dx + \int_{\rho\alpha}^{0} e^{-x^2}\,dx = 0.$$

De ces trois intégrales, la première a évidemment pour limite celle dont la valeur est fournie par la formule (18) du n° 28, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Ensuite nous prouverons que la seconde tend vers zéro, en commençant par y poser $x = \rho\alpha' + i\rho t$, d'où $dx = i\rho\,dt$, ce qui la change en

$$(18) \qquad i\int_0^{\alpha'} \rho\, e^{-\rho^2(\alpha'^2-t^2)}\, e^{-i.2\rho^2\alpha' t}\,dt,$$

où l'intégration doit se faire sur la partie positive de l'axe des valeurs réelles de t; car, t marchant ainsi de o à $\alpha' = \alpha''$, $x = \rho\alpha' + i\rho t$ décrit le segment rectiligne unissant les points $\rho\alpha'$ et $\rho\alpha' + i\rho\alpha' = \rho\alpha$; il en résulte que le module de la fonction à intégrer est constamment égal à $\rho e^{-\rho^2(\alpha'^2-t^2)}$. Comme $\frac{1}{\rho^2}\, l\,\frac{1}{\rho^2} = 2\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 l\left(\frac{1}{\rho}\right)$ est une quantité négative infiniment petite (187**), la quantité réelle

$$\alpha'^2 + \frac{1}{\rho^2}\, l\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$$

a une racine carrée positive $\tau < \alpha'$ et tendant vers α'; nous pourrons donc partager le segment $[o\alpha']$ en deux tronçons variables (avec ρ) savoir : l'un $[o\tau]$ de longueur $< \alpha'$, l'autre $[\tau\alpha']$ de longueur $\alpha' - \tau$ infiniment petite, et par suite décomposer l'intégrale figurant dans l'expression (18) en

$$\int_0^{\tau} \rho\, e^{-\rho^2(\alpha'^2-t^2)}\, e^{-i.2\rho^2\alpha' t}\,dt + \int_{\tau}^{\alpha'} \rho\, e^{-\rho^2(\alpha'^2-t^2)}\, e^{-i.2\rho^2\alpha' t}\,dt.$$

Sur le premier de ces nouveaux chemins, t ne peut surpasser $\tau = \sqrt{\alpha'^2 + \frac{1}{\rho^2}\, l\left(\frac{1}{\rho^2}\right)}$; on y a donc sans cesse

$$\rho^2(\alpha'^2 - t^2) > \rho^2(\alpha'^2 - \tau^2) > -\, l\left(\frac{1}{\rho^2}\right),$$

d'où $\rho e^{-\rho^2(\alpha'^2-t^2)} < \frac{1}{\rho}$; en d'autres termes, le module de la fonction à intégrer y reste inférieur à une quantité infiniment petite; par suite, l'intégrale correspondante tend vers zéro puisque son chemin est de longueur finie. Sur le second, on a $t = \alpha'$, d'où $\rho e^{-\rho^2(\alpha'^2-t^2)} < \rho$: la seconde intégrale a donc un module inférieur à

$$\rho(\alpha' - \tau) = \frac{\rho(\alpha'^2 - \tau^2)}{\alpha' + \tau} = \frac{2}{\alpha' + \tau}\left[-\frac{1}{\rho}\, l\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],$$

et par suite tend vers zéro parce qu'il en est ainsi pour le second facteur $-\frac{1}{\rho}\, l\left(\frac{1}{\rho}\right)$ tandis que le premier a $\frac{1}{\alpha'}$ pour limite.

La troisième des intégrales (17) tend donc, comme la première, vers une certaine limite; mais la substitution $x = \alpha s$, d'où $dx = \alpha\, ds$, conduisant à

$$\lim \int_{\rho\alpha}^{0} e^{-x^2}\, dx = -\alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 s^2}\, ds = -\alpha \int_0^{\infty} e^{-is^2}\, ds$$
$$= -\alpha \int_0^{\infty} \cos s^2\, ds + i\alpha \int_0^{\infty} \sin s^2\, ds,$$

où les dernières intégrations doivent s'opérer sur la partie positive de l'axe des valeurs réelles de s, la relation (17) donne à la limite

$$\alpha \mathrm{U} - i\alpha \mathrm{V} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

ou bien

$$\mathrm{U} + \mathrm{V} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$
$$\mathrm{U} - \mathrm{V} = 0,$$

en égalant les éléments homonymes des deux membres après avoir remplacé α par $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$ et $i\alpha$ par $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$. Ces dernières égalités donnent immédiatement

$$\mathrm{U} = \mathrm{V} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$



CHAPITRE III.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ÉLÉMENTAIRES.

Propriétés générales des équations linéaires quelconques.

40. Une équation différentielle est dite *linéaire*, quand elle ne contient que des termes dont chacun est le produit de quelque fonction donnée des variables indépendantes par une des fonctions inconnues seulement, ou bien par une de ses dérivées. Les équations de ce genre sont remarquables par la simplicité relative que cette forme spéciale confère à leurs propriétés générales, et aussi par leur immixtion dans certains problèmes de Mécanique d'un haut intérêt.

Le système du premier ordre équivalent à un système linéaire quelconque (285*) l'est forcément aussi, parce que la même propriété appartient en fait aux diverses équations auxiliaires dont cette transformation exige l'adjonction. Il suffit donc de s'occuper des systèmes du premier ordre, et même, parmi ces derniers, nous considérerons seulement ceux qui sont *immédiats, aux différentielles totales et à une seule variable indépendante* (286*), (287*).

En appelant x la variable indépendante, $u, v, \ldots, t$ les g fonctions inconnues, les systèmes de ce genre ont pour type évident

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= K_1 + A_1 u + B_1 v + \ldots + H_1 t,\\ \frac{dv}{dx} &= K_2 + A_2 u + B_2 v + \ldots + H_2 t,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dt}{dx} &= K_g + A_g u + B_g v + \ldots + H_g t, \end{aligned}\right.$$

où $K_1, A_1, \ldots, H_1, K_2, \ldots, H_g$ désignent $g(g+1)$ fonctions

données de x seulement, et l'existence de leurs intégrales ordinaires n'est subordonnée à aucune condition de passivité (299*).

41. Le titre exclusivement linéaire auquel $u, v, \ldots, t$ entrent dans les seconds membres des équations (1), entraîne plusieurs conséquences à noter tout d'abord.

I. *Les seuls systèmes de valeurs de ces quantités et de x pour lesquels ces seconds membres ne sont pas tous olotropes sont ceux où x a une valeur qui est singulière pour quelqu'une des fonctions* $K_1, \Lambda_1, \ldots, \ldots, H_g$. C'est évident.

II. *Les équations* (1) *n'ont jamais d'intégrales singulières.*

Il résulte effectivement de l'observation précédente (I), que $u, v, \ldots, t$ n'entrent pas dans les équations finies

$$\omega_1(x, \ldots) = 0, \qquad \omega_2(x, \ldots) = 0, \qquad \ldots \tag{2}$$

à adjoindre aux équations (1) pour former toutes celles qui déterminent les intégrales singulières (379*). Des intégrales de ce genre ne sauraient donc exister, puisque les équations (2), même seules, ne peuvent être identiquement satisfaites par la substitution à $u, v, \ldots, t$ d'aucun groupe de fonctions de x.

III. *On peut développer les intégrales ordinaires par la formule de Taylor, et cela, quelques valeurs initiales* $u_0, v_0, \ldots, t_0$ *qu'il aura plu de leur attribuer, à partir de toute valeur initiale* x_0 *de* x *pour laquelle aucune des fonctions* $K_1, \Lambda_1, \ldots, H_g$ *ne cesse d'être olotrope* (301*).

IV. *Ces intégrales ordinaires contiennent linéairement leurs valeurs initiales* $u_0, v_0, \ldots t_0$, *supposées indéterminées.*

La différentiation des équations (1) fournissant pour $\frac{d^2u}{dx^2}, \cdots, \frac{d^2t}{dx^2}$ des expressions linéaires en $\frac{du}{dx}, \cdots, \frac{dt}{dx}$, et ces dérivées premières s'exprimant linéairement elles-mêmes par ces mêmes équations au moyen de $u, \ldots, t$, leur élimination rendra forcément linéaires aussi les expressions ultimes des dérivées secondes en question (290*); et l'on s'assurera de la même manière que l'expression

ultime de toute dérivée de $u, \ldots, t$ conserve indéfiniment la même forme linéaire.

En appelant ainsi $K_1^{(m)}(x)$, $\Lambda_1^{(m)}(x)$, ..., $H_1^{(m)}(x)$ certaines fonctions de x seulement, on aura par exemple, pour toute valeur de l'indice m,

$$(3) \qquad \frac{d^{m+1}u}{dx^{m+1}} = K_1^{(m)}(x) + \Lambda_1^{(m)}(x)u + \ldots + H_1^{(m)}(x)t,$$

d'où, pour $x = x_0$,

$$\left(\frac{d^{m+1}u}{dx^{m+1}}\right)_{x_0} = K_1^{(m)}(x_0) + \Lambda_1^{(m)}(x_0)u_0 + \ldots + H_1^{(m)}(x_0)t_0,$$

moyennant quoi le coefficient de $(x - x_0)^{m+1}$ dans le développement de u est toujours linéairement composé de $u_0, \ldots, t_0$.

Comme cette série converge pour toutes valeurs de ces quantités (III), il en est évidemment de même pour les $g+1$ séries auxquelles elle se réduit quand on y substitue à son coefficient général, d'abord sa partie indépendante de $u_0, v_0, \ldots, t_0$, puis celles qui y multiplient chacune de ces mêmes quantités respectivement. En désignant donc par ${}^{(0)}u(x)$, ${}^{(1)}u(x)$, ..., ${}^{(g)}u(x)$ les sommes de ces $g+1$ séries,

$$(4) \qquad u = {}^{(0)}u(x) + u_0\,{}^{(1)}u(x) + v_0\,{}^{(2)}u(x) + \ldots + t_0\,{}^{(g)}u(x)$$

sera la forme du premier développement de l'intégrale u, celle aussi de tous ses développements subséquents par suite; et de même pour ceux de $v, \ldots, t$.

V. *Les intégrales des équations* (1) *restent olotropes* (*finies en particulier*) *aussi longtemps que les fonctions données* K_1, $\Lambda_1, \ldots, H_g$ *le demeurent toutes elles-mêmes.*

Les fonctions ${}^{(0)}u(x)$, ${}^{(1)}u(x)$, ..., ${}^{(g)}u(x)$, ${}^{(0)}v(x)$, ... qui figurent dans la formule (4) et dans celles analogues intéressant $v, \ldots, t$ dépendent de x_0, mais nullement de $u_0, \ldots, t_0$, ce qui est évident. Il en résulte que le plus grand rayon de convergence commun aux développements de toutes les intégrales, qui est précisément le même que pour ceux de ces $g(g+1)$ fonctions, ne dépend absolument que de x_0 et que pour toutes valeurs de cette quantité tombant dans une aire limitée S_x où les fonc-

tions K_1, ... sont toutes olotropes, on pourra l'obtenir en assujettissant u_0, ..., t_0 à rester intérieures à des aires limitées S_u, S_v, ..., S_t que l'on tracera arbitrairement. Or les seconds membres des équations (1) étant des fonctions olotropes de x, u, v, ..., t dans toutes ces aires, la théorie générale (301*) fournit toujours pour ce rayon une limite inférieure $\neq 0$, en suite de quoi les intégrales u, v, ..., t sont fonctions olotropes de x dans l'aire S_x quelque étendue que celle-ci ait d'ailleurs, ce qu'il suffisait de constater.

VI. Il en résulte que les seules phases critiques de nos intégrales sont fournies *a priori* par les valeurs

$$\mathfrak{a}, \quad \ldots \tag{5}$$

de x, pour lesquelles quelqu'une des fonctions K_1, ... cesse d'être olotrope, qu'à partir d'une valeur quelconque x_0 de x n'appartenant pas à cette suite, les développements des intégrales admettent des rayons de convergence au moins égaux au plus petit des modules des différences $(\mathfrak{a} - x_0)$, ..., (201*), et finalement que, si les fonctions K_1, ... sont indéfiniment olotropes, les intégrales le sont elles-mêmes toutes aussi.

42. Nous venons de constater implicitement (41, II) que toutes les intégrales des équations (1) sont renfermées dans leurs intégrales générales (384*). *A celles-ci on peut donner la forme*

$$\left\{\begin{array}{l} u = {}^{(0)}u + {}^{(1)}C\,{}^{(1)}u + {}^{(2)}C\,{}^{(2)}u + \ldots + {}^{(g)}C\,{}^{(g)}u, \\ v = {}^{(0)}v + {}^{(1)}C\,{}^{(1)}v + {}^{(2)}C\,{}^{(2)}v + \ldots + {}^{(g)}C\,{}^{(g)}v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t = {}^{(0)}t + {}^{(1)}C\,{}^{(1)}t + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + {}^{(g)}C\,{}^{(g)}t, \end{array}\right. \tag{6}$$

où ${}^{(0)}u$, ... *sont* $g(g+1)$ *fonctions de* x *seulement, et où* ${}^{(1)}C$, ..., ${}^{(g)}C$ *représentent les* g *constantes arbitraires* (383*). Plus brièvement, *on peut toujours faire en sorte que les constantes arbitraires y entrent linéairement.*

Les formules analogues à (4) rendent ce point évident dans le cas où on laisse les valeurs initiales jouer le rôle de constantes arbitraires. Pour obtenir la forme plus générale (6), il suffit d'y substituer à u_0, ..., t_0 des fonctions linéaires de ${}^{(1)}C$, ..., ${}^{(g)}C$, dont le déterminant des coefficients ne soit pas nul (383*, III).

Cette forme est celle que l'on considère exclusivement à cause de sa simplicité. On notera que *le déterminant des fonctions* ${}^{(1)}u, \ldots, {}^{(g)}t$, *qui y multiplient les constantes arbitraires, ne peut s'évanouir que pour les valeurs de* x *appartenant à la suite* (5). C'est effectivement le déterminant différentiel des intégrales générales pris par rapport aux constantes arbitraires (*loc. cit.*).

13. L'absence dans les équations (1) des *premiers termes* $K_1, \ldots, K_g$ de leurs seconds membres rend ceux-ci *homogènes* par rapport à $u, v, \ldots, t$, et fait acquérir au système des propriétés spéciales.

I. *Les intégrales générales peuvent, par rapport aux constantes arbitraires, être supposées non seulement linéaires, mais encore homogènes.*

Car la nullité identique de ces premiers termes entraîne évidemment celle des fonctions analogues $K_1^{(m)}(x), \ldots$ dans les relations ultimes (3) …. et par suite celle des fonctions ${}^{(0)}u(x), \ldots$ dans toutes les relations du genre de (4). Il s'ensuit que les premiers termes ${}^{(0)}u, \ldots, {}^{(0)}t$ des seconds membres des formules (6) seront identiquement nuls aussi, pourvu que l'on ait pris homogènes les expressions de $u_0, \ldots, t_0$ en ${}^{(1)}C, \ldots, {}^{(g)}C$.

II. *Si les fonctions qui constituent chaque colonne du Tableau*

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{llll} {}^{(1)}u, & {}^{(2)}u, & \ldots, & {}^{(k)}u, \\ {}^{(1)}v, & {}^{(2)}v, & \ldots, & {}^{(k)}v, \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ {}^{(1)}t, & {}^{(2)}t, & \ldots, & {}^{(k)}t, \end{array}\right.$$

sont des intégrales particulières quelconques du système (1), *et si* ${}^{(1)}C, \ldots, {}^{(k)}C$ *représentent* k *constantes arbitraires, les fonctions*

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} {}^{(1)}C\,{}^{(1)}u + \ldots + {}^{(k)}C\,{}^{(k)}u, \\ {}^{(1)}C\,{}^{(1)}v + \ldots + {}^{(k)}C\,{}^{(k)}v, \\ \dotfill \\ {}^{(1)}C\,{}^{(1)}t + \ldots + {}^{(k)}C\,{}^{(k)}t \end{array}\right.$$

sont aussi des intégrales du même système.

Car après la substitution de ces fonctions à u, v, ..., t dans la première équation (1) par exemple, les termes en ${}^{(1)}C$, ... dans son premier membre et dans son second sont $\frac{d\,{}^{(1)}u}{dx}$, ... et $A_1\,{}^{(1)}u + B_1\,{}^{(1)}v + \ldots + H_1\,{}^{(1)}t$, ... fonctions qui sont respectivement identiques parce que ${}^{(1)}u$, ..., ${}^{(1)}t$, ... sont supposées satisfaire à cette équation.

III. *Si $k = g$, et si le déterminant des fonctions* (7) *n'est pas identiquement nul, les expressions* (8) *sont les intégrales générales des équations* (1).

Effectivement elles ne renferment que des intégrales (II); de plus, elles peuvent acquérir des valeurs initiales arbitrairement choisies u_0, ..., t_0 pour toute valeur x_0 de x, n'annulant pas le déterminant en question. Car en y posant $x = x_0$, et les égalant à u_0, ..., t_0, on obtient entre les valeurs de ${}^{(1)}C$, ..., un système d'équations linéaires toujours possible. On peut donc faire coïncider ces fonctions avec un groupe quelconque d'intégrales particulières (382*).

44. La comparaison du système (1), supposé maintenant *non homogène*, c'est-à-dire quelconque, avec le système *homogène* auquel le réduit la simple suppression des premiers termes K_1, K_2, ..., K_g dans ses seconds membres, conduit ensuite à ces observations évidentes.

I. *En représentant par*

$$(9) \qquad {}^{(0)}u, \quad {}^{(0)}v, \quad \ldots, \quad {}^{(0)}t$$

un groupe donné quelconque d'intégrales du système non homogène, et toujours par (7) *des intégrales quelconques du système homogène, les fonctions* (8) *augmentées respectivement des fonctions* (9) *sont des intégrales du système non homogène.*

II. *Si $k = g$, et si le déterminant du Tableau* (7) *n'est pas identiquement nul, les fonctions définies ci-dessus* (I) *sont les intégrales générales du système non homogène.* En d'autres termes : *on obtiendra les intégrales générales du système non*

homogène, en ajoutant respectivement des fonctions telles que (9), *composant un quelconque de ses groupes d'intégrales particulières, aux intégrales générales du système homogène.*

45. Du théorème suivant résulte une connexité étroite et remarquable entre l'intégration du système quelconque (1) non homogène, et celle du système homogène correspondant.

Si l'on connaît $k \leqq g$ *groupes d'intégrales particulières du système homogène, formant un Tableau tel que* (7) *où le déterminant de quelque association de* k *lignes n'est pas identiquement nul, l'intégration du système non homogène revient à celle d'un système de même forme, mais à* $g-k$ *fonctions inconnues seulement, et à l'exécution de* k *quadratures* (223* *bis*).

Pour fixer les idées, nous supposerons que les k premières lignes du Tableau (7) donnent ainsi un déterminant non nul, que w, s sont les lettres affectées à la notation des intégrales connues composant ses $k^{\text{ième}}$ et $(k+1)^{\text{ième}}$ lignes, et nous poserons

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= {}^{(1)}C\,{}^{(1)}u + \ldots + {}^{(k)}C\,{}^{(k)}u,\\ v &= {}^{(1)}C\,{}^{(1)}v + \ldots + {}^{(k)}C\,{}^{(k)}v,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ w &= {}^{(1)}C\,{}^{(1)}w + \ldots + {}^{(k)}C\,{}^{(k)}w,\end{aligned}\right.$$

où *maintenant* ${}^{(1)}C, \ldots, {}^{(k)}C$ *représentent non plus des constantes, mais* k *fonctions indéterminées de* x, puis

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} s &= {}^{(1)}C\,{}^{(1)}s + \ldots + {}^{(k)}C\,{}^{(k)}s + \mathfrak{s},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ t &= {}^{(1)}C\,{}^{(1)}t + \ldots + {}^{(k)}C\,{}^{(k)}t + \mathfrak{t},\end{aligned}\right.$$

où $\mathfrak{s}, \ldots, \mathfrak{t}$ représentent $g-k$ autres fonctions indéterminées.

Quelles que soient $u, v, \ldots, w, s, \ldots t$, les g équations (10), (11) peuvent être résolues par rapport aux g fonctions ${}^{(1)}C, \ldots, {}^{(k)}C, \mathfrak{s}, \ldots, \mathfrak{t}$, parce qu'elles sont linéaires et que le déterminant des coefficients de ces dernières se réduit à celui des k premières lignes du Tableau (7), lequel est essentiellement supposé $\neq 0$. Il en résulte que les formules (10), (11) peuvent donner pour u, $v, \ldots, w, s, \ldots, t$ tous les groupes de fonctions imaginables,

et, en particulier, tous ceux que composent les intégrales du système proposé (1). Et, pour déterminer ${}^{(1)}C, \ldots, {}^{(k)}C, s, \ldots, t$, de manière qu'il en soit ainsi, il suffira de tirer ces fonctions des équations différentielles obtenues en substituant à $u, v, \ldots, w, s, \ldots, t$, dans les proposées (1), les seconds membres des formules (10), (11). En faisant cette substitution et ayant égard à ce que les fonctions composant chaque colonne du Tableau (7) sont des intégrales particulières, on aperçoit immédiatement que les termes où ${}^{(1)}C, \ldots, {}^{(k)}C$ figurent elles-mêmes comme facteurs se détruisent tous et qu'on obtient des k premières équations

$$(12)\quad \begin{cases} {}^{(1)}u\,\dfrac{d\,{}^{(1)}C}{dx}+\ldots+{}^{(k)}u\,\dfrac{d\,{}^{(k)}C}{dx}=K_1+F_1 s+\ldots+H_1 t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}^{(1)}w\,\dfrac{d\,{}^{(1)}C}{dx}+\ldots+{}^{(k)}w\,\dfrac{d\,{}^{(k)}C}{dx}=K_k+F_k s+\ldots+H_k t, \end{cases}$$

et des $g-k$ dernières

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{ds}{dx}=\left[K_{k+1}-{}^{(1)}s\,\dfrac{d\,{}^{(1)}C}{dx}-\ldots-{}^{(k)}s\,\dfrac{d\,{}^{(k)}C}{dx}\right]+F_{k+1}s+\ldots+H_{k+1}t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dt}{dx}=\left[K_g-{}^{(1)}t\,\dfrac{d\,{}^{(1)}C}{dx}-\ldots-{}^{(g)}t\,\dfrac{d\,{}^{(g)}C}{dx}\right]+F_g s+\ldots+H_g t, \end{cases}$$

où l'on a représenté par $F_1, \ldots, F_g$ les coefficients de s dans les seconds membres du système (1).

Les k équations (12) étant du premier degré en $\dfrac{d\,{}^{(1)}C}{dx}, \ldots, \dfrac{d\,{}^{(k)}C}{dx}$ avec un déterminant non nul, leur résolution fournira, pour ces dérivées, des expressions de la forme

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{d\,{}^{(1)}C}{dx}={}^{(1)}\mathcal{K}+{}^{(1)}\mathcal{F}s+\ldots+{}^{(1)}\mathcal{H}t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d\,{}^{(k)}C}{dx}={}^{(k)}\mathcal{K}+{}^{(k)}\mathcal{F}s+\ldots+{}^{(k)}\mathcal{H}t, \end{cases}$$

dont la substitution dans les équations (13) les changera en

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{ds}{dx}={}^{(k+1)}\mathcal{K}+{}^{(k+1)}\mathcal{F}s+\ldots+{}^{(k+1)}\mathcal{H}t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dt}{dx}={}^{(g)}\mathcal{K}+{}^{(g)}\mathcal{F}s+\ldots+{}^{(g)}\mathcal{H}t, \end{cases}$$

et les lettres $\mathfrak{X}$, ..., $\mathfrak{X}$ représentent des fonctions de x, toutes connues.

Cela posé, le système (15) est de même nature que le proposé (1), à cela près qu'il ne contient plus que les $g - k$ fonctions inconnues s, ..., t; son intégration donnera, pour ces dernières, des expressions contenant x et $g - k$ constantes arbitraires, dont la substitution dans les formules (14) changera leurs seconds membres en des fonctions connues de x; l'intégration indéfinie de ces seconds membres, exécution de simples quadratures, fournira enfin ${}^{(1)}C$, ..., ${}^{(k)}C$ en fonction de x, des $g - k$ constantes arbitraires dont il s'agit et de k nouvelles. Après quoi, pour avoir les intégrales générales du système (1), il n'y aura plus qu'à porter dans les formules (10), (11), les expressions ainsi trouvées pour ${}^{(1)}C$, ..., ${}^{(k)}C$, s, ..., t.

On remarquera que *le système auxiliaire* (15) *est toujours homogène quand le proposé* (1) *jouit de cette propriété.*

46. Quand $k = g$, le nombre des fonctions inconnues auxiliaires s, ..., t se réduit à zéro, et le calcul des intégrales générales du système (1) ne comporte plus que les g quadratures spécifiées par les équations (14) que nous écrirons alors

$$(16)\qquad \frac{d\,{}^{(1)}C}{dx} = {}^{(1)}\mathfrak{X}(x), \qquad \ldots, \qquad \frac{d\,{}^{(g)}C}{dx} = {}^{(g)}\mathfrak{X}(x).$$

En d'autres termes (43, III), *la connaissance des intégrales générales du système homogène réduit la recherche de celles du système non homogène à de simples quadratures.*

En appelant ${}^{(1)}c$, ..., ${}^{(g)}c$ des constantes arbitraires, x_0 une valeur initiale quelconque de x, et en représentant par une autre lettre ξ la variable d'intégration, toutes les solutions des équations (16) sont fournies par les formules

$$(17)\quad {}^{(1)}C = {}^{(1)}c + \int_{x_0}^{x} {}^{(1)}\mathfrak{X}(\xi)\,d\xi, \qquad \ldots, \qquad {}^{(g)}C = {}^{(g)}c + \int_{x_0}^{x} {}^{(g)}\mathfrak{X}(\xi)\,d\xi,$$

et ce sont ces fonctions qu'il faut porter dans les expressions (10) (en y supposant $k = g$) pour avoir les intégrales générales du système (1).

Les termes dépendant de ${}^{(1)}c$, ..., ${}^{(g)}c$ reproduisent (à la nota-

tion près) les intégrales générales du système homogène, et les sommes des autres constituent *des fonctions particulières à ajouter respectivement à ces intégrales générales pour avoir celles du système non homogène.*

47. Pour former ces fonctions additionnelles, Cauchy a donné cette élégante règle : *Chercher les intégrales particulières du système homogène qui, pour $x = \xi$, se réduisent respectivement à $K_1(\xi)$, ..., $K_g(\xi)$ résultats de la substitution de ξ à x dans $K_1(x)$, ..., $K_g(x)$, premiers termes des seconds membres des équations non homogènes* (1), *puis intégrer par rapport à ξ et de $\xi = x_0$ à $\xi = x$, les fonctions de x, ξ ainsi obtenues.*

L'opération, expliquée tout à l'heure, conduit effectivement à intégrer par rapport à ξ, de x_0 à x, les g fonctions de x, ξ

$$^1\mathcal{K}(\xi)\,{}^1u(x) + \ldots + {}^g\mathcal{K}(\xi)\,{}^gu(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$^1\mathcal{K}(\xi)\,{}^1t(x) + \ldots + {}^g\mathcal{K}(\xi)\,{}^gt(x).$$

Or, ce sont des intégrales du système homogène, puisque ${}^1u$, ..., ${}^gt$ y sont multipliées par des quantités indépendantes de x (43, II, III), et elles se réduisent bien à $K_1(\xi)$, ..., $K_g(\xi)$, quand on y fait $x = \xi$. Effectivement, si l'on y faisait inversement $\xi = x$, substitution équivalente à la notation près, il viendrait

$$^1\mathcal{K}(x)\,{}^1u(x) + \ldots + {}^g\mathcal{K}(x)\,{}^gu(x).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ce que les équations (16) réduisent à

$$^1u(x)\frac{d\,{}^1C}{dx} + \ldots + {}^gu(x)\frac{d\,{}^gC}{dx},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et les équations (12) à

$$K_1(x),$$
$$\ldots\ldots$$

en y prenant naturellement $k = g$ et y supprimant les termes en s, ..., t.

Ces fonctions additionnelles s'annulant toutes pour $x = x_0$ comme les intégrales définies figurant dans les formules (17),

les intégrales générales du système non homogène, sous la forme qui vient de leur être donnée, ont, dans cette hypothèse, les mêmes valeurs initiales que celles du système homogène correspondant. Pour faire acquérir aux premières intégrales des valeurs initiales données, il suffira donc d'attribuer aux constantes ${}^{(1)}c, \ldots, {}^{(g)}c$ les valeurs mêmes qui les font acquérir aux secondes.

48. La méthode précédente, permettant ainsi de déduire les intégrales générales du système non homogène de celles du système homogène correspondant supposées connues, consiste dans son essence à *modifier le premier système* (par la suppression des premiers termes de ses seconds membres) *de manière à rendre l'intégration possible, sauf à substituer ensuite des fonctions convenablement choisies aux constantes introduites par cette intégration*. Elle est connue sous le nom de *Variation des constantes arbitraires*, et trouve quelques autres applications encore. Par exemple, dans l'étude analytique du mouvement des planètes autour du Soleil, on commence par négliger leurs actions mutuelles, ce qui rend possible l'intégration des équations différentielles du problème et permet d'exprimer provisoirement les coordonnées de chacune en fonction du temps et de six constantes que l'on nomme ses *éléments*. Il ne reste plus ensuite qu'à chercher les fonctions du temps à substituer à ces éléments pour que les équations différentielles soient satisfaites après le rétablissement des termes primitivement négligés. On obtient même ainsi la meilleure image des phénomènes, parce que l'extrême petitesse de ces actions mutuelles, relativement à l'attraction du Soleil, impose à ces fonctions des variations très étroites, et les laisse sensiblement constantes dans des intervalles de temps fort longs.

49. Au lieu de raisonner sur des équations simultanées formant un système immédiat, ce qui nous a paru bien préférable, on considère habituellement une seule équation linéaire à une seule fonction inconnue, mais d'ordre quelconque g,

$$\frac{d^g u}{dx^g} + P\frac{d^{g-1} u}{dx^{g-1}} + \ldots + T\frac{du}{dx} + Uu = V, \tag{18}$$

où P, ... T, U, V sont naturellement des fonctions de x seulement, dont la dernière porte le nom de *second membre*. Pour faire la théorie d'une équation de ce genre, il suffit de combiner les principes généraux (381* *et suiv.*), (*Cf.* 409*) avec les propriétés du système immédiat équivalent

(19)
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{du}{dx} = u', \\ \dfrac{du'}{dx} = u'', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{du^{(g-2)}}{dx} = u^{(g-1)}, \\ \dfrac{du^{(g-1)}}{dx} = V - Uu - Tu' - \dots - Pu^{(g-1)}, \end{array}\right.$$

qui est toujours linéaire aussi comme nous l'avons déjà remarqué (40). Nous nous contenterons donc des observations suivantes.

I. *L'intégrale générale a la forme linéaire*

(20)
$$u = u_0 + C_1 u_1 + \dots + C_g u_g \qquad (42),$$

et les g fonctions $u_1, \dots, u_g$ sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'aucune d'elles ne peut s'exprimer d'une manière linéaire et homogène au moyen des $g-1$ autres.

Si, appelant $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_g$ quelque système de constantes non toutes $= 0$, on avait identiquement

(21)
$$\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \dots + \gamma_g u_g = 0,$$

on trouverait aussi, en différentiant 1. ... $(g-1)$ fois,

$$\begin{array}{l} \gamma_1 u'_1 + \gamma_2 u'_2 + \dots + \gamma_g u'_g = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_1 u_1^{(g-1)} + \gamma_2 u_2^{(g-1)} + \dots + \gamma_g u_g^{(g-1)} = 0, \end{array}$$

puis, en éliminant $\gamma_1, \dots, \gamma_g$,

(22)
$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_g \\ u'_1 & u'_2 & \dots & u'_g \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(g-1)} & u_2^{(g-1)} & \dots & u_g^{(g-1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Or cette identité est impossible parce que son premier membre est le déterminant différentiel pris par rapport aux constantes arbitraires de l'intégrale générale et de ses $g-1$ premières dérivées (409*, III).

II. *Quand le second membre V de l'équation* (18) *est identiquement nul, on peut toujours faire en sorte que le premier terme u_0 de son intégrale générale n'existe pas.* Car alors le système équivalent (19) est homogène (43, I).

III. *Si, dans la même hypothèse,*

$$(23) \qquad u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_k$$

sont des intégrales particulières de l'équation (18), *la fonction*

$$(24) \qquad C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_k u_k$$

en est une autre, $C_1, \ldots, C_k$ désignant des constantes arbitraires (43, II).

Si de plus $k=g$, et si les fonctions (23) *sont linéairement indépendantes* (I), *la fonction* (24) *est l'intégrale générale.*

Car alors l'identité (22) ne peut avoir lieu (51, *inf.*).

IV. *Pour obtenir l'intégrale générale de l'équation* (18), *il suffit d'ajouter une de ses intégrales particulières, choisie à volonté, à l'intégrale générale de la même équation rendue homogène par la suppression de son second membre* (44, II).

V. *On peut former cette fonction additionnelle en intégrant de $\xi = x_0$ à $\xi = x$ l'intégrale particulière de l'équation sans second membre déterminée par les conditions initiales*

$$u = u' = \ldots = u^{(g-2)} = 0 \quad \text{et} \quad u^{(g-1)} = V(\xi), \quad \text{pour } x = \xi.$$

C'est ce que donne immédiatement la règle de Cauchy appliquée au système équivalent (19); car les premiers termes des seconds membres sont identiquement nuls dans les $g-1$ premières équations, et celui de la dernière est $V(x)$ (47).

50. La transformation de l'intégrale indéfinie multiple

$$(25) \qquad u = \int \ldots \int V(x)\, dx^g \qquad (211^* \text{ IV})$$

en une intégrale indéfinie simple fournit une application intéressante de la dernière observation. Cette intégrale étant, par définition, l'intégrale générale de l'équation linéaire

$$\frac{d^g u}{dx^g} = V(x), \tag{26}$$

son expression s'obtiendra en ajoutant à un polynôme entier en x et de degré $g-1$, à coefficients indéterminés, intégrale générale de l'équation sans second membre (192*), une intégrale particulière quelconque de l'équation pourvue de son second membre; et, pour cette intégrale particulière, on peut prendre

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{g-1}}{1.2\ldots(g-1)} V(\xi)\,d\xi. \tag{27}$$

Effectivement la fonction de x, placée sous le signe $\int$, satisfait à l'équation sans second membre puisqu'elle se réduit à un polynôme entier de degré $< g$; de plus, elle s'évanouit pour $x = \xi$ avec ses $g-2$ premières dérivées, tandis que sa $(g-1)^{\text{ième}}$ se réduit à $V(\xi)$.

L'aptitude de l'expression (27) à vérifier l'équation (26) est d'ailleurs facile à vérifier, car on trouve immédiatement pour sa dérivée première (259*)

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d}{dx}\left[\frac{(x-\xi)^{g-1}}{1.2\ldots(g-1)} V(\xi)\right] d\xi + \left[\frac{(x-\xi)^{g-1}}{1.2\ldots(g-1)} V(\xi)\right]_{\xi=x}$$
$$= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{g-2}}{1.2\ldots(g-2)} V(\xi)\,d\xi,$$

puis de même, pour ses dérivées d'ordres $2, \ldots, g-1$,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{g-3}}{1.2\ldots(g-3)} V(\xi)\,d\xi, \quad \ldots, \quad \int_{x_0}^{x} V(\xi)\,d\xi,$$

et finalement, pour sa $g^{\text{ième}}$,

$$[V(\xi)]_{\xi=x} = V(x).$$

La réduction des g intégrations comportées par l'expression (25) à celle en apparence unique de l'expression (27) peut sembler paradoxale; mais, au fond, cette dernière n'est pas moins compliquée que l'autre, puisqu'elle est embarrassée d'une variable

paramétrique, ou bien, si l'on préfère ce point de vue, qu'elle se montre composée de g intégrales dépourvues de variables paramétriques, par le développement du facteur $(x-\xi)^{g-1}$.

51. Nous terminerons ce paragraphe par la proposition à laquelle nous nous sommes référés au n° 49, III, et qui est utile dans d'autres circonstances encore.

Si les déterminants du Tableau

$$(28)\quad \left\{\begin{matrix} u_1, & u_2, & \ldots, & u_k, \\ u'_1, & u'_2, & \ldots, & u'_k, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(h-1)}, & u_2^{(h-1)}, & \ldots, & u_k^{(h-1)}, \end{matrix}\right.$$

formé avec $k>1$ fonctions olotropes de x, savoir $u_1, u_2, \ldots, u_k$ et leurs dérivées d'ordres inférieurs à $h \leq k$, sont tous identiquement nuls, mais non tous ceux du même Tableau privé de sa dernière ligne, il existe $q=k-h+1$ lignes de k constantes chacune

$$(29)\quad \left\{\begin{matrix} \gamma_1^{(1)}, & \gamma_2^{(1)}, & \ldots, & \gamma_k^{(1)}, \\ \gamma_1^{(2)}, & \gamma_2^{(2)}, & \ldots, & \gamma_k^{(2)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_1^{(q)}, & \gamma_2^{(q)}, & \ldots, & \gamma_k^{(q)}, \end{matrix}\right.$$

formant un Tableau dont les déterminants (d'ordre q) ne sont pas tous nuls, qui donnent les q identités

$$(30)\quad \gamma_1^{(i)} u_1 + \gamma_2^{(i)} u_2 \ldots + \gamma_k^{(i)} u_k = 0.$$

Pour faire la démonstration, il suffit évidemment de prouver que l'identité (22), accompagnée de la condition

$$(31)\quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_{g-1} \\ u'_1 & u'_2 & \ldots & u'_{g-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(g-2)} & u_2^{(g-2)} & \ldots & u_{g-1}^{(g-2)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

entraîne l'identité (21) avec $\gamma_g \neq 0$.

A cause de l'identité (22), on peut assigner g fonctions de x, savoir $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_g$, la dernière arbitraire, partant non toutes

identiquement nulles, qui donnent les g suivantes

$$(32)\quad \begin{cases} \Gamma_1 u_1 + \Gamma_2 u_2 + \ldots + \Gamma_g u_g = 0, \\ \Gamma_1 u'_1 + \Gamma_2 u'_2 + \ldots + \Gamma_g u'_g = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Gamma_1 u_1^{(g-1)} + \Gamma_2 u_2^{(g-1)} + \ldots + \Gamma_g u_g^{(g-1)} = 0, \end{cases}$$

et si $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_g$ se réduisent toutes à des constantes, l'exactitude du point en question résulte immédiatement de la première de ces identités.

Sinon $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \ldots, \Gamma'_g$ ne sont pas toutes $= 0$, et la combinaison du résultat de la différentiation de chacune des identités (32) avec la suivante donne les $g - 1$ autres

$$(33)\quad \begin{cases} \Gamma'_1 u_1 + \Gamma'_2 u_2 + \ldots + \Gamma'_g u_g = 0, \\ \Gamma'_1 u'_1 + \Gamma'_2 u'_2 + \ldots + \Gamma'_g u'_g = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Gamma'_1 u_1^{(g-2)} + \Gamma'_2 u_2^{(g-2)} + \ldots + \Gamma'_g u_g^{(g-2)} = 0. \end{cases}$$

Cela posé, et moyennant l'inégalité (31), la comparaison des identités (33) avec les $g - 1$ premières du Tableau (32) montre que tous les déterminants du Tableau

$$\begin{Vmatrix} \Gamma_1, & \Gamma_2, & \ldots, & \Gamma_g, \\ \Gamma'_1, & \Gamma'_2, & \ldots, & \Gamma'_g \end{Vmatrix}$$

sont identiquement nuls, et, par suite, puisque dans aucune des deux lignes de celui-ci, les éléments ne le sont tous, que la dernière équation du Tableau (32) donne aussi bien

$$(34)\quad \Gamma'_1 u_1^{(g-1)} + \Gamma'_2 u_2^{(g-1)} + \ldots + \Gamma'_g u_g^{(g-1)} = 0.$$

En différentiant donc cette même dernière équation du Tableau (32) et la combinant avec celle-ci (34), il viendra

$$\Gamma_1 u_1^{(g)} + \Gamma_2 u_2^{(g)} + \ldots + \Gamma_g u_g^{(g)} = 0,$$

puis indéfiniment à l'aide du même raisonnement

$$(35)\quad \Gamma_1 u_1^{(i)} + \Gamma_2 u_2^{(i)} + \ldots + \Gamma_g u_g^{(i)} = 0,$$

où i est l'indice d'une différentiation d'ordre quelconque.

Si maintenant on attribue à x une valeur particulière ξ rendant olotropes toutes les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_g$ et donnant aux

fonctions $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_g$ des valeurs particulières $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_g$ dont la dernière soit $\neq 0$, l'identité indéfinie (35) montre que pour $x = \xi$ la fonction

$$\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \ldots + \gamma_g u_g$$

s'évanouit numériquement avec ses dérivées de tous ordres. Cette fonction s'évanouit donc identiquement, comme nous voulions le prouver (187*).

En regardant les qk éléments du Tableau (29) comme des constantes arbitraires, les q identités (30) peuvent être considérées comme des *équations intégrales générales* du système d'équations différentielles, d'ordre $h - 1$, entre les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_k$, que l'on forme en égalant à zéro tous les déterminants du Tableau (28).

Intégration des équations linéaires à coefficients constants.

52. Le système linéaire (1) du n° 40 est dit à *coefficients constants*, quand les multiplicateurs de $u, v, \ldots, t$ dans les seconds membres s'y réduisent tous à des constantes. *Si, de plus, il est homogène*, cas auquel tous les autres se ramènent facilement (46), *ses intégrales générales se réduisent toujours à des fonctions composées entières de x et d'exponentielles à exposants linéaires en x.* Son intégration générale s'exécute par des formules d'une rare élégance dues à Cauchy, que nous allons établir en suivant toutefois une marche différente.

Nous écrirons le système à intégrer

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} + a_1 u + b_1 v + \ldots + h_1 t = 0, \\ \dfrac{dv}{dx} + a_2 u + b_2 v + \ldots + h_2 t = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dt}{dx} + a_g u + b_g v + \ldots + h_g t = 0, \end{cases}$$

où $a_1, \ldots, h_g$ sont des constantes quelconques; nous représenterons par

$$(2)\qquad u_0, \quad v_0, \quad \ldots, \quad t_0$$

les valeurs initiales indéterminées à assigner aux intégrales pour $x = x_0$; nous écrirons encore

$$(3)\quad f(s) = \begin{vmatrix} s+a_1 & b_1 & \dots & h_1 \\ a_2 & s+b_2 & \dots & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_g & b_g & \dots & s+h_g \end{vmatrix} = s^g + p_1 s^{g-1} + \dots + p_g,$$

polynôme entier de degré effectif g par rapport à la variable auxiliaire s, puis

$$(4)\quad \begin{cases} \vartheta(s) = u_0\alpha_1(s) + v_0\alpha_2(s) + \dots + t_0\alpha_g(s), \\ \varphi(s) = u_0\beta_1(s) + v_0\beta_2(s) + \dots + t_0\beta_g(s), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varpi(s) = u_0\gamma_1(s) + v_0\gamma_2(s) + \dots + t_0\gamma_g(s), \end{cases}$$

polynômes entiers en s, de degrés apparents $= g - 1$, dans le Tableau desquels les multiplicateurs de $u_0, v_0, \dots, t_0$ représentent les déterminants d'ordre $g - 1$, mineurs complémentaires des éléments du déterminant (3) contenant les lettres romaines analogues affectées des mêmes indices respectivement. Cela posé, on a ce théorème très simple :

Les intégrales du système (1) *ayant les valeurs initiales* (2), *c'est-à-dire ses intégrales générales puisque ces quantités demeurent arbitraires, sont fournies par les formules*

$$(5)\quad u = \mathcal{E}_s \frac{\vartheta(s)e^{s(x-x_0)}}{f(s)}, \quad v = \mathcal{E}_s \frac{\varphi(s)e^{s(x-x_0)}}{f(s)}, \quad \dots, \quad t = \mathcal{E}_s \frac{\varpi(s)e^{s(x-x_0)}}{f(s)},$$

dont chaque second membre est le résidu intégral de la fonction méromorphe de s placée sous le signe $\mathcal{E}_s$ (56**).

I. *Les valeurs initiales* $u_m, v_m, \dots, t_m$ *des dérivées d'ordre quelconque m des intégrales cherchées sont liées entre elles par les g récurrences simultanées indéfinies*

$$(6)\quad \begin{cases} u_{m+1} + a_1u_m + b_1v_m + \dots + h_1t_m = 0, \\ v_{m+1} + a_2u_m + b_2v_m + \dots + h_2t_m = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t_{m+1} + a_gu_m + b_gv_m + \dots + h_gt_m = 0. \end{cases}$$

Pour les obtenir, il suffit effectivement de différentier m fois les équations (1), puis d'y poser $x = x_0$.

II. *Les séries entières en z*

$$(7)\quad \begin{cases} U(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_m z^m + \ldots, \\ V(z) = v_0 + v_1 z + \ldots\ldots\ldots + v_m z^m + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T(z) = t_0 + t_1 z + \ldots\ldots\ldots + t_m z^m + \ldots \end{cases}$$

admettent des rayons de convergence tous différents de o, *et leurs sommes sont fournies par les formules*

$$(8)\quad \begin{cases} U(z) = \dfrac{u_0 A_1(z) + v_0 A_2(z) + \ldots + t_0 A_g(z)}{F(z)}, \\ V(z) = \dfrac{u_0 B_1(z) + v_0 B_2(z) + \ldots + t_0 B_g(z)}{F(z)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T(z) = \dfrac{u_0 H_1(z) + v_0 H_2(z) + \ldots + t_0 H_g(z)}{F(z)}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(9)\quad \begin{vmatrix} 1 + a_1 z & b_1 z & \ldots & h_1 z \\ a_2 z & 1 + b_2 z & \ldots & h_2 z \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_g z & b_g z & \ldots & 1 + h_g z \end{vmatrix} = F(z),$$

polynôme entier de degré apparent g en z, et où

$$\begin{matrix} A_1(z), & B_1(z), & \ldots, & H_1(z), \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_g(z), & B_g(z), & \ldots, & H_g(z) \end{matrix}$$

représentent les déterminants d'ordre $g - 1$ qui constituent les mineurs complémentaires des éléments semblablement placés dans le Tableau du déterminant (9) *ci-dessus, et qui tous, comme ce dernier, sont des polynômes entiers en z, mais de degré $g - 1$ seulement.*

En admettant pour un instant la convergence des séries (7), on trouve facilement que leurs sommes sont liées par les g équations linéaires simultanées

$$(10)\quad \begin{cases} (1 + a_1 z)U + b_1 z\, V + \ldots\ldots + h_1 z\, T = u_0, \\ a_2 z\, U + (1 + b_2 z)V + \ldots\ldots + h_2 z\, T = v_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_g z\, U + \quad + b_g z\, V + \ldots + (1 + h_g z)T = t_0. \end{cases}$$

Car en ajoutant, par exemple, les seconds membres des formules de définition (7) multipliés respectivement par

$$1 + a_1 z, \quad b_1 z, \quad \ldots, \quad h_1 z,$$

on constate immédiatement que, dans le résultat, le terme indépendant de z se réduit à u_0 et tous les autres coefficients à zéro, à cause de ce que donne la première des récurrences (6) pour $m = 0, 1, 2, \ldots$. Et de même pour les équations (10) autres que la première. Or la résolution de ces équations conduit directement aux formules (8).

Maintenant, comme on a

$$F(z) = 1 - p_1 z - p_2 z^2 \ldots p_g z^g,$$

polynôme qui ne peut s'évanouir en $z = 0$, les fonctions rationnelles (8) y sont olotropes, partant développables par la formule de Maclaurin (276*); et les séries entières constituées par ces développements ne peuvent différer des proposées (7), puisqu'elles satisfont aux identités (10), lesquelles entraînent les récurrences (6) qui, $u_0, v_0, \ldots, t_0$ une fois donnés, déterminent tous les autres coefficients sans aucune ambiguïté.

III. *Si, $F(z)$ désignant toujours le polynôme (9), de degré effectif $\leqq g$,*

$$\frac{\Omega(z)}{F(z)} = \varpi_0 + \varpi_1 z + \ldots + \varpi_m z^m + \ldots \tag{11}$$

est le développement par la formule de Maclaurin, d'une fraction rationnelle en z dont le numérateur $\Omega(z)$ est un polynôme entier quelconque en z, la série entière

$$\left\{\frac{\Omega(z)}{F(z)}\right\} = \varpi_0 + \frac{\varpi_1}{1} z + \frac{\varpi_2}{1.2} z^2 + \ldots + \frac{\varpi_m}{1.2\ldots m} z^m + \ldots \tag{12}$$

est convergente pour toutes les valeurs de z, et sa somme est fournie par la formule

$$\left\{\frac{\Omega(z)}{F(z)}\right\} = \mathcal{E}_s \frac{\Omega\left(\frac{1}{s}\right)}{F\left(\frac{1}{s}\right)} \frac{e^{sz}}{s}. \tag{13}$$

1° Quand la fraction rationnelle (11) se réduit au monôme

entier

(14) $$z^\chi,$$

on a évidemment

(15) $$\{z^\chi\} = \frac{z^\chi}{1.2\ldots\chi} = \mathcal{E}_{s=0}\frac{e^{sz}}{s^{\chi+1}} = \mathcal{E}_{s=0}\left(\frac{1}{s}\right)^\chi \frac{e^{sz}}{s}.$$

2° Quand elle se réduit à la fraction simple

(16) $$\frac{1}{(1-s_i z)^q},$$

s_i désignant quelque constante $\neq 0$, on a

$$\frac{1}{(1-s_i z)^q} = \sum \frac{q(q+1)\ldots(q+m-1)}{1.2\ldots m} s_i^m z^m \qquad (152^*)$$
$$= \frac{1}{1.2\ldots(q-1)}\sum(m+1)(m+2)\ldots(m+q-1)s_i^m z^m.$$

D'où, successivement et sans difficulté,

$$\left\{\frac{1}{(1-s_i z)^q}\right\} = \frac{1}{1.2\ldots(q-1)}\sum(m+1)\ldots(m+q-1)\frac{s_i^m z^m}{1.2\ldots m}$$
$$= \frac{1}{1.2\ldots(q-1)}\sum\left\{\frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}}\left[\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}\frac{(sz)^{m+q-1}}{1.2\ldots(m+q-1)}\right]\right\}_{s=s_i}$$
$$= \frac{1}{1.2\ldots(q-1)}\left[\frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}}\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}e^{sz}\right]_{s=s_i} \qquad (194^{**} \textit{ et suiv.})$$
$$= \frac{1}{1.2\ldots(q-1)}\left[\frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}}(s^{q-1}e^{sz})\right]_{s=s_i}.$$

Or (56**) cette dernière expression est précisément le résidu de la fonction méromorphe de s

$$\frac{s^{q-1}e^{sz}}{(s-s_i)^q}$$

par rapport à son infini s_i de degré q de multiplicité. On a donc en définitive

(17) $$\left\{\frac{1}{(1-s_i z)^q}\right\} = \mathcal{E}_{s=s_i}\frac{s^{q-1}e^{sz}}{(s-s_i)^q} = \mathcal{E}_{s=s_i}\frac{1}{\left(1-s_i\frac{1}{s}\right)^q}\frac{e^{sz}}{s}.$$

3° Dans le cas général, et cela parce que l'équation $F(z)=0$ n'a jamais la racine $z=0$, la fraction rationnelle (11) peut être

mise (52**) sous forme d'une certaine fonction linéaire et homogène de monômes entiers comme (14) et de fractions simples analogues à (16), et, par suite, la série (12) sous forme de la même fonction linéaire et homogène des résidus tels que (15), (17) correspondant à ces divers éléments simples.

Or en réunissant tous ces résidus partiels en un seul résidu intégral, la réduction en une seule fraction des termes simples en

$$\ldots,\quad \left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha},\quad \ldots,\quad \frac{1}{\left(1-s_i\frac{1}{s}\right)^{q}},\quad \ldots$$

amène évidemment sous le signe $\mathcal{E}$ le produit de $\frac{e^{sz}}{s}$ par l'expression

$$\frac{\Omega\left(\frac{1}{s}\right)}{F\left(\frac{1}{s}\right)},$$

ce que nous avions à prouver.

IV. Les formules de Cauchy sont maintenant évidentes; car les développements des intégrales s'obtenant par la substitution de $x-x_0$ à z dans les formules (7), après l'apposition du diviseur numérique $1.2\ldots m$ sous le coefficient de z^m, se sommeront par la formule (13) où l'on prendra successivement pour $\Omega(z)$ les numérateurs des seconds membres des relations (8). On trouvera donc bien les formules (5), à cause de l'identité immédiate

$$s^g F\left(\frac{1}{s}\right) = f(s),$$

et de celles analogues fournies par la comparaison des numérateurs en question avec les polynômes (4).

La simple substitution des fonctions (5) montre d'ailleurs *a posteriori* qu'elles satisfont effectivement aux équations (1); comme en outre les termes de degrés maximum dans $f(s)$, $\alpha_1(s)$ sont s^g, s^{g-1}, et que les polynômes $\alpha_2(s)$, $\alpha_3(s)$, ..., $\alpha_g(s)$ sont de degrés certainement inférieurs à $g-1$, la discussion des résidus montrera sans difficulté que, pour $x=x_0$, on a bien $u=u_0$, et de même $v=v_0$, ..., $t=t_0$ (64**).

V. Pour calculer, dans la première des formules (5) par exemple, le résidu partiel relatif à la racine s_i de degré de multiplicité q_i de *l'équation caractéristique*

$$f(s) = 0. \tag{18}$$

il faut (56**) diviser par $1.2\ldots(q_i - 1)$ la valeur, pour $s = s_i$, de la dérivée $(q_i - 1)^{\text{ième}}$ par rapport à s du produit

$$\left[\frac{(s - s_i)^{q_i}\varphi(s)}{f(s)}\right] e^{s(x-x_0)}.$$

Le développement de cette dérivée (255*), suivi de la substitution numérique $s = s_i$, fournit le produit de l'exponentielle à exposant linéaire $e^{s_i(x-x_0)}$ par quelque polynôme entier en x de degré $q_i - 1$, ce qui est conforme aux indications du commencement de ce numéro.

53. Si les équations (1) cessaient d'être homogènes par suite de la présence dans leurs seconds membres, de fonctions de x non toutes identiquement nulles, $K_1(x)$, ... $K_g(x)$, la règle de Cauchy (47) fournirait immédiatement les fonctions à ajouter aux expressions (5) pour en avoir les intégrales générales. *Ces fonctions additionnelles s'obtiennent en intégrant de x_0 à x par rapport à ξ, ce que deviennent ces mêmes expressions* (5) *par la substitution de ξ à x_0 et de $K_1(\xi)$, ... $K_g(\xi)$ à u_0, ..., t_0 respectivement.* Pour la première par exemple, il vient ainsi

$$\int_{x_0}^{x} d\xi \,\mathcal{E}\left[\frac{K_1(\xi)\alpha_1(s) + K_2(\xi)\alpha_2(s) + \ldots + K_g(\xi)\alpha_g(s)}{f(s)} e^{s(x-\xi)}\right].$$

54. Les formules (5) sont naturellement compliquées d'imaginaires, quand les coefficients du système (1) ne sont pas tous réels, ou même quand ils le sont, si les racines de l'équation caractéristique (18) ne le sont pas toutes.

Mais, comme dans ce dernier cas les développements des intégrales ne peuvent manquer d'avoir leurs coefficients tous réels, pourvu toutefois que les valeurs initiales (2) aient été prises telles (28** *bis*), leurs expressions générales (5) peuvent certainement être mises sous une forme réelle même en apparence.

On y réussit en observant que toute racine imaginaire $s_i' + is_i''$

de l'équation caractéristique est accompagnée de la racine conjuguée $s'_i - is''_i$ au même degré de multiplicité, qu'on peut substituer

$$(19) \qquad e^{s'_i(x-x_0)}\cos s''_i(x-x_0) \pm ie^{s'_i(x-x_0)}\sin s''_i(x-x_0)$$

à $e^{(s'_i \pm is''_i)(x-x_0)}$ (197**), (236**), et qu'ainsi le développement des expressions (5) ne donne jamais un terme imaginaire sans donner en même temps son conjugué, et sans permettre ainsi des réductions ne laissant subsister que des quantités réelles. Ainsi donc en gros, *cette transformation remplace chaque paire d'exponentielles imaginaires conjuguées, par celle des éléments de la fonction imaginaire* (19), *produit d'une même exponentielle réelle par le cosinus et le sinus d'un même argument réel.* Nous ne nous y arrêterons pas plus longtemps, tant elle est facile à exécuter dans chaque cas particulier.

55. Quelques mots encore sur l'équation linéaire et homogène à coefficients constants, d'ordre quelconque g, à une seule fonction inconnue,

$$(20) \qquad \frac{d^g u}{dx^g} + p_1 \frac{d^{g-1} u}{dx^{g-1}} + \ldots + p_{g-1}\frac{du}{dx} + p_g u = 0,$$

que l'on a l'habitude de traiter directement dans les Cours, mais qu'il vaudrait mieux étudier indirectement sur le système immédiat équivalent qui est aussi linéaire, à coefficients constants, et de la forme spéciale (1) du n° 52.

I. *L'équation caractéristique de ce système est précisément*

$$(21) \qquad f(s) = s^g + p_1 s^{g-1} + \ldots + p_{g-1}s + p_g = 0,$$

résultat de la substitution de s^i *à* $\frac{d^i u}{dx^i}$ *dans l'équation proposée* (20). C'est ce que montre une transformation facile du déterminant (3) construit pour ce cas.

II. *Si* s_i *est une racine de degré de multiplicité* q_i *de l'équation* (21), *chacune des* q_i *fonctions*

$$(22) \qquad e^{s_i x}, \quad xe^{s_i x}, \quad \ldots, \quad x^{q_i-1}e^{s_i x}$$

est une intégrale particulière de l'équation (20).

Car, en appelant χ un exposant positif quelconque, on peut écrire

$$x^{\chi} e^{s_i x} = \left[\frac{d^{\chi}}{ds^{\chi}} e^{sx}\right]_{s=s_i},$$

moyennant quoi le résultat de la substitution de cette fonction dans le premier membre de notre équation différentielle se met facilement sous la forme

$$\left\{\frac{d^{\chi}}{ds^{\chi}}\,[f(s)\,e^{sx}]\right\}_{s=s_i}.$$

Or cette quantité s'évanouit identiquement quand χ est $< q_i$, parce que les termes du développement de la dérivée formé par la règle du n° 255* ont pour facteurs les quantités

$$f(s), \quad f'(s), \quad \ldots, \quad f^{(\chi)}(s),$$

toutes nulles par hypothèse pour $s = s_i$.

III. *Les g fonctions analogues à* (22) *que fournissent au total les racines numériquement distinctes de l'équation caractéristique* (21) *sont linéairement indépendantes* (49, I).

Dans le cas contraire, en effet, le déterminant (22) du numéro cité qui est ici

$$\left|\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots & e^{s_i x} & \dfrac{d}{ds_i} e^{s_i x} & \dfrac{d^2}{ds_i^2} e^{s_i x} & \ldots & \dfrac{d^h}{ds_i^h} e^{s_i x} & \ldots & \dfrac{d^{q_i-1}}{ds_i^{q_i-1}} e^{s_i x} & e^{s_{i+1} x} & \ldots \\
\ldots & s_i e^{s_i x} & \dfrac{d}{ds_i}(s_i e^{s_i x}) & \ldots\ldots & \ldots & \dfrac{d^h}{ds_i^h}(s_i e^{s_i x}) & \ldots & \dfrac{d^{q_i-1}}{ds_i^{q_i-1}}(s_i e^{s_i x}) & s_{i+1} e^{s_{i+1} x} & \ldots \\
\ldots & s_i^2 e^{s_i x} & \dfrac{d}{ds_i}(s_i^2 e^{s_i x}) & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & s_{i+1}^2 e^{s_{i+1} x} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
\ldots & s_i^{g-1} e^{s_i x} & \dfrac{d}{ds_i}(s_i^{g-1} e^{s_i x}) & \ldots\ldots & \ldots & \dfrac{d^h}{ds_i^h}(s_i^{g-1} e^{s_i x}) & \ldots & \ldots\ldots & s_{i+1}^{g-1} e^{s_{i+1} x} & \ldots
\end{array}\right.$$

serait identiquement nul. Or c'est impossible, car les opérations consistant : 1° à multiplier ce déterminant par $e^{s_i x}$ et en même temps par $e^{-s_i x}$ les éléments de la colonne occupant le $(h+1)^{\text{ième}}$ rang dans le groupe de celles où est engagée la racine s_i; 2° à ajouter aux éléments de cette colonne ceux de mêmes rangs dans

les h précédentes multipliés respectivement par

$$\frac{d^h e^{-s_i x}}{ds_i^h},\quad \frac{h}{1}\,\frac{d^{h-1} e^{-s_i x}}{ds_i^{h-1}},\quad \frac{h(h-1)}{1.2}\,\frac{d^{h-2} e^{-s_i x}}{ds_i^{h-2}},\quad \dots,\quad \frac{h}{1}\,\frac{d e^{-s_i x}}{ds_i},$$

ce qui (255*) la change en

$$\begin{aligned}
\frac{d^h}{ds_i^h}\left(e^{s_i x} e^{-s_i x}\right) &= \frac{d^h}{ds_i^h}(1),\\
\frac{d^h}{ds_i^h}\left(s_i e^{s_i x} e^{-s_i x}\right) &= \frac{d^h}{ds_i^h}(s_i),\\
\frac{d^h}{ds_i^h}\left(s_i^2 e^{s_i x} e^{-s_i x}\right) &= \frac{d^h}{ds_i^h}(s_i^2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{d^h}{ds_i^h}\left(s_i^{g-1} e^{s_i x} e^{-s_i x}\right) &= \frac{d^h}{ds_i^h}(s_i^{g-1});
\end{aligned}$$

3° à exécuter l'opération précédente pour toutes les colonnes du groupe considéré, en prenant h égal à $q_i - 1$, $q_i - 2$, ..., 2, 1, 0 successivement; 4° à recommencer enfin les opérations 1°, 2°, 3° pour chacun des groupes de colonnes où sont engagées les racines $\dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots$, laissent le même déterminant identiquement égal à ce qu'il était auparavant, tout en lui donnant la forme

$$\dots(e^{s_{i-1}x})^{q_{i-1}}(e^{s_i x})^{q_i}(e^{s_{i+1}x})^{q_{i+1}}\dots$$
$$\times\begin{vmatrix}
\dots & 1 & \frac{d1}{ds_i} & \frac{d^2 1}{ds_i^2} & \dots & \frac{d^{q_i-1}1}{ds_i^{q_i-1}} & 1 & \dots\\
\dots & s_i & \frac{ds_i}{ds_i} & \frac{d^2 s_i}{ds_i^2} & \dots & \frac{d^{q_i-1}s_i}{ds_i^{q_i-1}} & s_{i+1} & \dots\\
\dots & s_i^2 & \frac{ds_i^2}{ds_i} & \frac{d^2 s_i^2}{ds_i^2} & \dots & \dots\dots & s_{i+1}^2 & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & s_i^{g-1} & \frac{ds_i^{g-1}}{ds_i} & \frac{d^2 s_i^{g-1}}{ds_i^2} & \dots & \dots\dots & s_{i+1}^{g-1} & \dots
\end{vmatrix}.$$

où les premiers facteurs sont des exponentielles, c'est-à-dire des fonctions incapables de s'évanouir (196**), où le dernier facteur est un déterminant numérique dont la valeur est essentiellement $\neq 0$ puisque $\dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots$ sont des racines toutes inégales (411*, III, IV).

IV. *On pourra donc former empiriquement l'intégrale gé-*

nérale de l'équation (20), *en faisant la somme de ces g intégrales particulières, multipliées préalablement par autant de constantes arbitraires* (49, III).

56. Nous terminerons par deux applications particulières très simples des principes précédents.

I. Pour l'équation du second ordre

$$\frac{d^2 u}{dx^2} \mp S^2 u = 0,$$

où S est une quantité réelle qui peut être supposée positive, on a l'équation caractéristique du deuxième degré

$$f(s) = s^2 \mp S^2 = 0$$

ayant les deux racines simples $\pm S$ dans le premier cas et $\pm iS$ dans le second, et fournissant ainsi pour intégrale générale (55), soit

$$u = C_1 e^{Sx} + C_2 e^{-Sx},$$

soit

$$u = C_1 e^{iSx} + C_2 e^{-iSx}.$$

Cette dernière implique extérieurement des quantités imaginaires, mais les formules (17), (18) du n° 236** permettent de l'écrire

$$\begin{aligned} u &= (C_1 + C_2)\cos Sx + i(C_1 - C_2)\sin Sx \\ &= \qquad C'_1 \cos Sx + \qquad C'_2 \sin Sx, \end{aligned}$$

expression qui est réelle en apparence, et même en fait si l'on n'y attribue que des valeurs réelles aux nouvelles constantes arbitraires C'_1, C'_2.

II. Supposons qu'au lieu d'être homogène, l'équation (20) ait un second membre de la forme

$$V(x) = x^k e^{\mathfrak{s}x}, \tag{23}$$

k étant un exposant entier positif, $\mathfrak{s}$ une constante quelconque, et calculons empiriquement le terme additionnel qu'il introduit dans l'intégrale générale (49, IV).

En appelant $\mathfrak{q}$ le degré de multiplicité auquel la racine $s = \mathfrak{s}$ peut appartenir à l'équation caractéristique (21) [on prendra

$\mathfrak{q}=0$, si $f(\mathfrak{s})=0$], et, en utilisant une seconde fois l'artifice employé déjà au n° 55, II, on trouvera (255*), grâce toujours aux égalités

$$f(\mathfrak{s})=f'(\mathfrak{s})=\ldots=f^{(\mathfrak{q}-1)}(\mathfrak{s})=0,$$

que, dans le premier membre de l'équation proposée, la substitution, à u, des fonctions

$$x^{\mathfrak{q}}e^{\mathfrak{s}x},\quad x^{\mathfrak{q}+1}e^{\mathfrak{s}x},\quad \ldots,\quad x^{\mathfrak{q}+k}e^{\mathfrak{s}x}$$

donne les résultats

$$(24)\quad\left\{\begin{aligned}
&\left\{\frac{d^{\mathfrak{q}}}{ds^{\mathfrak{q}}}[f(s)e^{sx}]\right\}_{s=\mathfrak{s}}=f^{(\mathfrak{q})}(\mathfrak{s})e^{\mathfrak{s}x},\\
&\left\{\frac{d^{\mathfrak{q}+1}}{ds^{\mathfrak{q}+1}}[f(s)e^{sx}]\right\}_{s=\mathfrak{s}}=\left[\frac{\mathfrak{q}+1}{1}f^{(\mathfrak{q})}(\mathfrak{s})x+f^{(\mathfrak{q}+1)}(\mathfrak{s})\right]e^{\mathfrak{s}x},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\left\{\frac{d^{\mathfrak{q}+k}}{ds^{\mathfrak{q}+k}}[f(s)e^{sx}]\right\}_{s=\mathfrak{s}}=\left[\frac{(\mathfrak{q}+k)(\mathfrak{q}+k-1)\ldots(\mathfrak{q}+1)}{1.2\ldots k}f^{(\mathfrak{q})}(\mathfrak{s})x^{k}\right.\\
&\qquad+\frac{(\mathfrak{q}+k)(\mathfrak{q}+k-1)\ldots(\mathfrak{q}+2)}{1.2\ldots(k-1)}\\
&\qquad\left.\times f^{(\mathfrak{q}+1)}(\mathfrak{s})x^{k-1}+\ldots+f^{(\mathfrak{q}+k)}(\mathfrak{s})\right]e^{\mathfrak{s}x}.
\end{aligned}\right.$$

En appelant donc $\lambda_{\mathfrak{q}}, \lambda_{\mathfrak{q}+1}, \ldots, \lambda_{\mathfrak{q}+k}$, $k+1$ constantes indéterminées, la substitution de

$$(25)\qquad \lambda_{\mathfrak{q}}x^{\mathfrak{q}}e^{\mathfrak{s}x}+\lambda_{\mathfrak{q}+1}x^{\mathfrak{q}+1}e^{\mathfrak{s}x}+\ldots+\lambda_{\mathfrak{q}+k}x^{\mathfrak{q}+k}e^{\mathfrak{s}x}$$

donnera la même expression linéaire et homogène des fonctions (24), et l'identification de cette expression avec la fonction (23) conduira aux équations de condition, linéaires et en même nombre $k+1$,

$$\begin{aligned}
\varphi_0^{(0)}\lambda_{\mathfrak{q}}+\varphi_0^{(1)}\lambda_{\mathfrak{q}+1}+\ldots+\varphi_0^{(k)}\lambda_{\mathfrak{q}+k}&=0,\\
\varphi_1^{(1)}\lambda_{\mathfrak{q}+1}+\ldots+\varphi_1^{(k)}\lambda_{\mathfrak{q}+k}&=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
\varphi_k^{(k)}\lambda_{\mathfrak{q}+k}&=1,
\end{aligned}$$

dont les coefficients $\varphi_0^{(0)}, \ldots$ sont des quantités connues parmi lesquelles $\varphi_0^{(0)}, \varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(2)}, \ldots, \varphi_k^{(k)}$ sont essentiellement $\neq 0$ à cause de $f^{(\mathfrak{q})}(\mathfrak{s})\neq 0$. La résolution de ces équations, à faire de bas en haut, est donc possible, et fournira successivement les valeurs à

attribuer à λ_{q+k}, ..., λ_{q+1}, λ_q pour que la fonction (25) satisfasse à l'équation proposée (20) pourvue du second membre (23).

III. De là, on passe immédiatement au cas plus large où le second membre serait une expression linéaire et homogène par rapport à des fonctions quelconques de la forme (23), cas comprenant ceux où quelques termes de cette expression seraient des formes $x^k \cos \mathfrak{s} x$, $x^k \sin \mathfrak{s} x$ et x^k aussi; car ce dernier monôme est ce que devient cette fonction (23) pour $\mathfrak{s} = 0$.

Équations diverses à une seule fonction inconnue.

57. Sauf des cas isolés qui n'offrent aucun intérêt au point de vue général, les équations différentielles dont l'intégration pratique est possible ou du moins réductible à des quadratures (223* *bis*), (402*) se rattachent à des types fort rares, mais aussi fort simples, dont le plus remarquable a été étudié dans le paragraphe précédent. Les autres ne comprennent que des équations à une seule fonction inconnue; nous allons les passer en revue, en commençant par les équations du premier ordre.

Dans une pareille équation, on dit *les variables séparées* quand elle est de la forme

$$\text{(1)} \qquad U \frac{du}{dx} + X = 0,$$

où X est une simple fonction de x et U une fonction composée de u seulement. La différentielle totale $U\,du + X\,dx$ étant alors exacte (210*), l'équation intégrale générale (391*, IV) est

$$\int [U\,du + X\,dx] = \int U\,du + \int X\,dx = 0 \quad (400^*),$$

et sa formation n'exige ainsi que des quadratures s'apercevant immédiatement.

Si l'on veut mettre la constante arbitraire en évidence, on écrira

$$\int_{u_0}^{u} U\,du + \int_{x_0}^{x} X\,dx = C.$$

En prenant $C = 0$, cette équation devient celle qu'il faut

résoudre par rapport à u pour obtenir l'intégrale particulière se réduisant à u_0 pour $x = x_0$.

Il est évident que l'équation (1) n'a aucune intégrale singulière si l'on n'a pas identiquement $X = 0$. Quand $X = 0$, elle n'en a pas davantage, car elle réduit $\frac{du}{dx}$ à l'expression zéro qui ne peut cesser d'être olotrope (379*), (406*).

58. Quand on se trouve en présence d'une équation du premier ordre à intégrer, on commence toujours par essayer d'y séparer les variables. On y réussit quelquefois en la multipliant par quelque fonction de x, u, jouant alors le rôle de multiplicateur intégrant (399* *et suiv.*), plus souvent par un changement de variables approprié aux circonstances (*Cf.* 60, *inf.*).

Si l'équation donnée était, par exemple, de la forme

$$\frac{du}{dx} + U(u)X(x) = 0, \tag{2}$$

sa simple multiplication par $\frac{1}{U(u)}$ donnerait l'équation

$$\frac{1}{U(u)}\frac{du}{dx} + X(x) = 0,$$

où les variables sont maintenant séparées.

59. Cette observation conduit en particulier à l'intégration de l'équation linéaire et homogène du premier ordre

$$\frac{du}{dx} = A(x)u$$

qui se change ainsi en

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = A(x),$$

d'où en intégrant (171**)

$$l(u) = \int_{x_0}^{x} A(x)dx + c,$$

ou bien

$$u = Ce^{\int_{x_0}^{x} A\,dx} \tag{3}$$ (194** *et suiv.*)

si, pour abréger, l'on pose $e^c = C$.

S'il s'agissait de l'équation toujours linéaire, mais non homogène,

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{K}(x) + \mathrm{A}(x)u,$$

il suffirait, pour obtenir son intégrale générale, d'ajouter à la fonction (3) l'expression

$$e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{A}\,dx} \int_{x_0}^{x} \mathrm{K}(\xi) e^{-\int_{x_0}^{\xi} \mathrm{A}\,dx}\, d\xi,$$

obtenue en intégrant par rapport à ξ de $\xi = x_0$ à $\xi = x$, la détermination de cette même fonction qui, pour $x = \xi$, se réduit à $\mathrm{K}(\xi)$ (49, V).

60. Un changement très simple de la fonction inconnue suffit pour séparer les variables dans *l'équation homogène du premier ordre*

(4) $$\frac{du}{dx} = \varphi\left(\frac{u}{x}\right),$$

équation de forme immédiate, dont le second membre se réduit à quelque fonction composée du rapport $\frac{u}{x}$.

En appelant effectivement v une nouvelle fonction inconnue, et posant

(5) $$u = vx,$$

d'où

$$\frac{du}{dx} = v + x\frac{dv}{dx},$$

l'équation (4) se change visiblement en

(6) $$\frac{1}{v - \varphi(v)}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x} = 0$$

ayant pour intégrale générale (57)

$$\int \frac{dv}{v - \varphi(v)} + l(x) = 0 \qquad (171^{**}).$$

Pour avoir enfin la fonction inconnue u, il faut porter dans la

formule (5) l'expression de la fonction auxiliaire v tirée de cette dernière équation finie.

Remarquons qu'en inversant la fonction v (329*) l'équation (6) prend, par rapport à la nouvelle fonction inconnue x, la forme linéaire et homogène

$$\frac{dx}{dv} = -\frac{1}{v - \varphi(v)} x.$$

61. Le lecteur appliquera sans difficulté les considérations précédentes à l'équation homogène

$$\frac{du}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 u}{a_2 x + b_2 u} = \frac{a_1 + b_1 \frac{u}{x}}{a_2 + b_2 \frac{u}{x}},$$

où a_1, b_1, a_2, b_2 représentent quatre constantes.

L'équation

(7) $$\frac{du}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 u + c_1}{a_2 x + b_2 u + c_2}$$

se ramène facilement à la précédente, ou bien s'intègre non moins aisément par les moyens simples dont nous disposons.

I. Quand on n'a pas

(8) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

il existe une paire de quantités x_0, u_0 donnant numériquement

$$a_1 x_0 + b_1 u_0 + c_1 = a_2 x_0 + b_2 u_0 + c_2 = 0,$$

moyennant quoi si, appelant x', u' une nouvelle variable et une nouvelle fonction inconnue, on pose

$$x = x_0 + x', \qquad u = u_0 + u',$$

d'où $\frac{du}{dx} = \frac{du'}{dx'}$ (325*), l'équation (7) prend la forme homogène

$$\frac{du'}{dx'} = \frac{a_1 x' + b_1 u'}{a_2 x' + b_2 u'}.$$

II. Quand au contraire l'égalité (8) a lieu, u est l'intégrale indéfinie d'une différentielle rationnelle du premier degré, si $b_1 = b_2 = 0$.

Autrement, on a identiquement

$$a_1 x + b_1 u = k_1(ax + bu), \qquad a_2 x + b_2 u = k_2(ax + bu),$$

avec $b \neq 0$. En appelant donc v une nouvelle fonction inconnue, la substitution

$$u = \frac{v}{b} - \frac{ax}{b},$$

d'où

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dv}{dx} - \frac{a}{b}$$

change l'équation (7) en celle-ci

$$\frac{dx}{dv} = a + b\,\frac{k_1 v + c_1}{k_2 v + c_2}$$

rentrant dans la forme plus générale (2) où les variables se séparent par une simple multiplication.

62. Les intégrations particulières que nous venons d'exécuter s'appliquent à des équations différentielles mises avant tout sous la forme immédiate. Mais on conçoit sans peine la possibilité d'opérer autrement dans certaines circonstances; en voici un exemple.

Supposons qu'il s'agisse d'une équation différentielle dont la résolution par rapport à la fonction inconnue soit *pratiquement* facile et la transforme en

$$u = F\left(x, \frac{du}{dx}\right). \tag{9}$$

L'adjonction d'une seconde fonction inconnue p et de l'équation $\frac{du}{dx} = p$, permet de substituer à l'équation (9) le système mixte (376*, V) des deux équations

$$\left\{\begin{aligned} u &= F(x, p), \\ \frac{du}{dx} &= p, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

aux deux fonctions inconnues u, p. Une combinaison évidente de la seconde équation avec le résultat de la différentiation de la

première, change ensuite ce système en cet autre

$$(11)\qquad \begin{cases} u = F(x, p), \\ p = F^{(1,0)}(x, p) + F^{(0,1)}(x, p)\dfrac{dp}{dx}, \end{cases}$$

qui lui est équivalent; car on régénère la seconde équation (10) en combinant la seconde du système (11) avec la première préalablement différentiée. En outre la seconde équation (11) ne contient pas u, et $\frac{dp}{dx}$ y entre linéairement, d'où la possibilité de la mettre sur-le-champ sous la forme immédiate. Pour obtenir la fonction u, il suffit donc d'intégrer l'équation en p dont il s'agit, puis de porter l'expression de p, au moyen de x et de la constante arbitraire, dans la première équation du même système auxiliaire (10). Dans les cas suivants on y réussit par de simples quadratures.

I. Quand $F\left(x, \frac{du}{dx}\right)$, second membre de l'équation proposée (9), ne contient pas x et se réduit par exemple à $f\left(\frac{du}{dx}\right)$, on a

$$F^{(1,0)}(x, p) = 0, \qquad F^{(0,1)}(x, p) = f'(p),$$

et la seconde équation (11) devient

$$\frac{f'(p)}{p}\frac{dp}{dx} - 1 = 0,$$

où les variables sont séparées (57).

II. Quand $F\left(x, \frac{du}{dx}\right)$ est linéaire par rapport à x et de la forme

$$\varphi(p)x + \psi(p),$$

on a

$$F^{(1,0)}(x, p) = \varphi(p), \qquad F^{(0,1)}(x, p) = \varphi'(p)x + \psi'(p),$$

et la seconde équation (11) devient

$$(12)\qquad p = \varphi(p) + [\varphi'(p)x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}.$$

Cela posé, si l'on n'a pas

$$(13)\qquad \varphi(p) = p,$$

l'inversion de la fonction inconnue p (329*) change l'équation précédente en une autre

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)} + \frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} x$$

qui est linéaire par rapport à la nouvelle fonction inconnue x de la nouvelle variable p (59).

Si au contraire l'identité (13) a lieu, cas auquel l'équation proposée (9), dite alors *de Clairaut*, a la forme

(14) $$u = x\frac{du}{dx} + \psi\left(\frac{du}{dx}\right),$$

l'équation (12) se réduit à

$$[x+\psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0$$

donnant soit

$$\frac{dp}{dx} = 0,$$

soit

$$x+\psi'(p) = 0.$$

La première alternative conduit à $p = C = \frac{du}{dx}$, d'où, pour l'intégrale générale de l'équation de Clairaut,

(15) $$u = Cx + \psi(C).$$

La dernière conduit à la fonction u de x formant conjointement avec p un couple de solutions des équations finies

(16) $$\begin{cases} u = px + \psi(p), \\ x + \psi'(p) = 0. \end{cases}$$

Mais cette autre intégrale est singulière (288*); car la fonction p de x, u considérées comme deux variables indépendantes que fournit la résolution de l'équation différentielle proposée (14), opérée par rapport à $\frac{du}{dx}$, est racine de l'équation finie

$$xp + \psi(p) - u = 0$$

et satisfait par suite au système immédiat d'équations différentielles totales provenant de la différentiation de celle-ci par rap-

port à x et u

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \frac{-p}{x+\psi'(p)}, \\ \frac{dp}{du} &= \frac{1}{x+\psi'(p)}. \end{aligned}\right.$$

Elle cesse donc certainement d'être olotrope quand sa valeur et celle correspondante de x vérifient la seconde équation (16), puisque alors $\frac{dp}{du}$ est infinie, partant non olotrope (165*).

On retrouverait immédiatement cette intégrale singulière en remarquant que l'intégrale générale (15) se trouve sous la forme normale précisée au n° 385*, et en lui adjoignant l'équation

$$x+\psi'(C)=0,$$

qu'engendre sa différentiation par rapport à C (408*).

63. Le cas où c'est par rapport à la variable indépendante qu'est pratiquement facile la résolution de l'équation différentielle proposée se ramène au précédent par la simple inversion de la fonction inconnue. En prenant effectivement u pour variable indépendante et x pour fonction inconnue, une équation de la forme

$$x = F\left(u, \frac{du}{dx}\right)$$

devient (329*)

$$x = F\left(u, \frac{1}{\frac{dx}{du}}\right) = F_1\left(u, \frac{dx}{du}\right)$$

et retourne ainsi au type (9).

64. L'intégration *pratique* des équations différentielles est un genre de calcul analogue à celui des intégrales indéfinies, mais plus empirique encore, et son succès ainsi que ses procédés sont bien plus dominés par les hasards des circonstances où l'on se trouve jeté. Comme ressources courantes, il ne reste guère que les combinaisons de celles dont nous avons rapporté les exemples les plus simples : séparation des variables à tenter par les substitutions dont on peut disposer, réduction à la forme linéaire, plus généralement aux quadratures, par l'inversion de la fonction

inconnue ou quelque autre tour de main; plus rarement, emploi de quelque multiplicateur intégrant, mais nous avons dit pourquoi ce dernier moyen est si précaire (402*). Là aussi, l'habileté doit s'acquérir par l'exercice, et il n'y a guère que les applications de l'Analyse à la Géométrie et à la Mécanique pour en fournir des thèmes offrant de la variété et un véritable intérêt. Nous passons donc sous silence quelques autres types d'équations du premier ordre dont on s'occupe par habitude dans les Cours et dans les Ouvrages classiques, et nous serons encore plus bref sur celles d'ordres supérieurs dont il nous reste à dire quelques mots.

65. L'équation du second ordre

$$F\left(u, \frac{d^2 u}{dx^2}\right) = 0 \tag{17}$$

peut être intégrée de deux manières, selon que sa résolution par rapport à $\frac{d^2 u}{dx^2}$ ou à u est pratiquement la plus facile.

Dans le premier cas, on obtient à sa place

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(u), \tag{18}$$

forme très fréquente dans les applications mécaniques. En la multipliant par $2\frac{du}{dx}$, il vient

$$2\frac{du}{dx}\frac{d^2 u}{dx^2} = 2f(u)\frac{du}{dx},$$

où les deux membres sont les dérivées de certaines fonctions composées (différentielle et finie) de u considérée comme fonction simple indéterminée (265* *et suiv.*). En prenant donc leurs intégrales indéfinies, on trouve cette intégrale première (*Cf.* 400*)

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = 2\int_{u_0}^{u} f(u)\,du + C,$$

ou bien

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{2\int_{u_0}^{u} f(u)\,du + C},$$

équation du premier ordre rentrant dans la forme (2) et qu'il

suffit d'intégrer pour avoir l'intégrale générale de l'équation proposée (17) ou (18).

Dans le second cas, on obtient

$$u = \varphi\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right). \tag{19}$$

On procède alors à peu près comme au n° 62, en introduisant deux fonctions inconnues auxiliares p, q définies par les équations

$$\frac{du}{dx} = p, \qquad \frac{dp}{dx} = q \qquad \left(= \frac{d^2 u}{dx^2}\right),$$

ce qui substitue à l'équation unique (19) le système mixte (376*. V)

$$\left\{\begin{aligned} u &= \varphi(q), \\ \frac{du}{dx} &= p, \\ \frac{dp}{dx} &= q. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Si maintenant on prend q pour variable indépendante au lieu de x, ces équations deviennent

$$u = \varphi(q), \qquad \frac{du}{dq} = p\,\frac{dx}{dq}, \qquad \frac{dp}{dq} = q\,\frac{dx}{dq} \qquad (332^*),$$

ou bien, en combinant les deux dernières avec la première différentiée (par rapport à q maintenant),

$$u = \varphi(q), \qquad \frac{dx}{dq} = \frac{\varphi'(q)}{p}, \qquad p\,\frac{dp}{dq} = q\,\varphi'(q). \tag{21}$$

La dernière, où les variables sont séparées, donne

$$p^2 = 2\int_{q_0}^{q} q\,\varphi'(q)\,dq + C_1;$$

p étant maintenant connue, la seconde donne en intégrant encore

$$x = \int_{q_0}^{q} \frac{\varphi'(q)}{p}\,dq + C_2,$$

et, pour obtenir u en fonction de x, il n'y a plus qu'à porter dans la première équation (21) l'expression de q tirée de cette dernière.

66. Sauf les difficultés que sa résolution peut offrir, une équation d'ordre quelconque mais de la forme

$$F\left(\frac{d^g u}{dx^g}, \frac{d^{g+h} u}{dx^{g+h}}\right) = 0,$$

où $h \overline{\gtrless} 2$, est toujours intégrable par les quadratures. Si, en effet, on la résout par rapport à la dérivée de l'ordre le plus élevé, il vient

$$\frac{d^{g+h} u}{dx^{g+h}} = f\left(\frac{d^g u}{dx^g}\right),$$

et si l'on pose ensuite $\frac{d^g u}{dx^g} = p$, on la remplace par le système

$$(22) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^g u}{dx^g} &= p, \\ \frac{d^h p}{dx^h} &= f(p), \end{aligned} \right.$$

entre les fonctions inconnues u, p, l'une principale, l'autre auxiliaire.

Quand $h = 1$, la seconde équation (22) rentre dans la forme (2) où les variables se séparent immédiatement. Quand $h = 2$ elle est de la forme (18) traitée ci-dessus. Dans les deux cas, des quadratures conduisent donc à

$$(23) \qquad p = \varpi(x),$$

fonction maintenant connue, comportant 1 ou 2 constantes arbitraires. Pour avoir u, il ne reste plus ensuite, en vertu de la première équation (22), qu'à intégrer g fois par rapport à x cette fonction $\varpi(x)$. A cet objet on emploiera, si on le veut, la méthode indiquée au n° 50; mais la marche suivante peut être préférable en pratique.

La seconde équation (22), quand $h = 1$, ou son intégrale première obtenue comme au n° 65 quand $h = 2$, sont de la forme

$$(24) \qquad \frac{dp}{dx} = \psi(p),$$

et une intégration indéfinie exécutée sur la première équation du même système conduit à

$$(25) \qquad \frac{d^{g-1} u}{dx^{g-1}} = \int \varpi(x)\, dx.$$

Mais, si l'on substitue à la variable x, la variable p liée à elle par l'équation (23), il vient $dx = \frac{dx}{dp}\,dp = \frac{1}{\varpi'(x)}\,dp = \frac{1}{\psi(p)}\,dp$ à cause de l'équation (24), et, pour l'expression de $\frac{d^{g-1}u}{dx^{g-1}}$ en fonction de p, la relation (25) donne

$$\frac{d^{g-1}u}{dx^{g-1}} = \int \frac{p}{\psi(p)}\,dp = \Upsilon_{g-1}(p, C_1).$$

On trouve ensuite de même

$$\frac{d^{g-2}u}{dx^{g-2}} = \int \Upsilon_{g-1}[\varpi(x), C_1]\,dx = \int \frac{\Upsilon_{g-1}(p, C_1)}{\psi(p)}\,dp$$
$$= \Upsilon_{g-2}(p, C_1, C_2),$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$u = \Upsilon(p, C_1, C_2, \ldots, C_g).$$

On obtient enfin u, en remplaçant ici p par son expression en x, tirée de

$$x = \int \frac{dp}{\psi(p)},$$

intégrale de l'équation (24), renfermant 1 ou 2 constantes arbitraires selon que $h = 1$ ou $= 2$.

67. Plus généralement, l'intégration d'une équation différentielle revient à celle d'une équation d'ordre moindre et à des quadratures, ce qu'on exprime en disant que *son ordre peut être abaissé*, quand elle ne contient pas la fonction inconnue (explicitement); le nombre d'unités dont son ordre peut être ainsi diminué est son excès sur le moindre ordre des dérivées qui y figurent.

Car l'équation en question

$$F\left(x, \frac{d^g u}{dx^g}, \frac{d^{g+1} u}{dx^{g+1}}, \ldots, \frac{d^{g+h} u}{dx^{g+h}}\right) = 0$$

peut être remplacée comme ci-dessus par le système

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^g u}{dx^g} = p,\\ &F\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \ldots, \frac{d^h p}{dx^h}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

où la dernière équation n'est plus que d'ordre $h = (g + h) - g$.

68. Par sa combinaison avec l'inversion de la fonction inconnue, l'opération précédente permet d'abaisser d'une unité au moins l'ordre d'une équation différentielle

$$\mathrm{F}\left(u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots, \frac{d^g u}{dx^g}\right) = 0$$

qui ne contient pas la variable indépendante (explicitement). Car les formules propres à l'exécution de l'inversion

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}}, \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = \ldots, \qquad \ldots \qquad (329^*)$$

ne contiennent ni x ni u, et les ordres de leurs seconds membres (par rapport à la nouvelle fonction x) sont respectivement égaux à ceux de leurs premiers membres (par rapport à l'ancienne fonction u). Cette opération conduit donc à une équation de la forme

$$\mathrm{F}_1\left(u, \frac{dx}{du}, \frac{d^2x}{du^2}, \ldots, \frac{d^g x}{du^g}\right) = 0,$$

c'est-à-dire ne contenant pas la nouvelle fonction inconnue x (67).

Quand l'équation proposée ne contient ni x, ni u, on peut évidemment y opérer ces deux abaissements l'un après l'autre.

69. Un autre cas d'abaissement possible par une quadrature, bien moins intéressant encore il est vrai, est celui où le premier membre de l'équation proposée

$$(26) \qquad \mathrm{F}\left(x, u, \frac{du}{dx}, \ldots, \frac{d^g u}{dx^g}\right) = 0$$

est (algébriquement) homogène par rapport à $u, \frac{du}{dx}, \ldots, \frac{d^g u}{dx^g}$. Car si, appelant v une nouvelle fonction inconnue, on pose

$$(27) \qquad u = e^{\int v\,dx},$$

on trouvera, en différentiant,

$$\frac{du}{dx} = e^{\int v\,dx} v,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = e^{\int v\,dx}\left(v^2 + \frac{dv}{dx}\right),$$

et plus généralement

$$\frac{d^i u}{dx^i} = e^{\int v\,dx} V_{i-1},$$

où V_{i-1} est une fonction composée différentielle de v, dont l'ordre est $i - 1$ seulement.

Si donc on fait ces substitutions dans l'équation (26), elle deviendra

$$\left[e^{\int v\,dx}\right]^M F_1\left(x, v, \frac{dv}{dx}, \ldots, \frac{d^{g-1}v}{dx^{g-1}}\right) = 0,$$

en ayant égard à l'homogénéité supposée de la composante F, et en appelant M son degré d'homogénéité. La suppression du facteur exponentiel qui ne peut s'évanouir, réduit cette équation à

$$F_1\left(x, v, \frac{dv}{dx}, \ldots, \frac{d^{g-1}v}{dx^{g-1}}\right) = 0$$

qui n'est plus que d'ordre $g - 1$. Son intégration donnera v avec $g - 1$ constantes arbitraires. Après quoi, une simple quadrature, en introduisant une $g^{\text{ième}}$, fera connaître l'exposant de e dans la formule (27) et par suite u.

Si nous ne savions pas intégrer l'équation du premier ordre linéaire et homogène (59), cette méthode nous permettrait de le faire en nous conduisant d'ailleurs au même résultat.



CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

Équations linéaires par rapport aux dérivées de la fonction inconnue.

70. Un système immédiat d'équations différentielles partielles étant donné (335*), on peut toujours le supposer passif (378*), et, si l'on fait abstraction de ses intégrales singulières qui, en dernière analyse, sont toujours ordinaires pour quelque système auxiliaire de même nature (379*), son intégration consiste à trouver tous ses groupes d'intégrales ordinaires, ou bien encore ses *intégrales générales*, c'est-à-dire des fonctions contenant des éléments d'indétermination les laissant satisfaire indéfiniment aux équations proposées tout en permettant de leur assigner des déterminations initiales choisies à volonté (366*).

L'opération est considérée comme achevée, quand on a pu la ramener à l'intégration de quelque système d'équations différentielles totales. Cette réduction constitue un problème très vaste dont la solution générale est inconnue et semble offrir de grandes difficultés. On a pu toutefois l'exécuter dans des cas particuliers d'une certaine étendue, dont nous traiterons les plus intéressants sous leurs formes les plus simples.

71. Nous nous occuperons ici de *celui où il y a une seule fonction inconnue u d'une seule variable principale x, de variables paramétriques $u_1, u_2, \ldots, u_q$, en nombre quelconque, et où l'équation, alors unique, qui compose le système, contient linéairement les dérivées (paramétriques) de u.* Nous écrirons cette équation

$$(1) \qquad \frac{du}{dx} = \mathrm{A} - \mathrm{A}_1 \frac{du}{du_1} - \mathrm{A}_2 \frac{du}{du_2} - \ldots - \mathrm{A}_q \frac{du}{du_q},$$

où Λ, Λ_1, ..., Λ_q représentent des fonctions (olotropes) données de x, u_1, u_2, ..., u seulement. Elle est le type des *équations aux dérivées partielles linéaires par rapport à celles-ci*, et le théorème suivant trace la marche à suivre pour obtenir son intégrale générale.

On intègre le système immédiat auxiliaire d'équations différentielles (totales)

$$(2) \qquad \frac{du}{dx} = \Lambda, \qquad \frac{du_1}{dx} = \Lambda_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{du_q}{dx} = \Lambda_q,$$

aux fonctions inconnues u, u_1, ..., u_q, *à la variable* x, *et si*

$$(3) \qquad \Gamma(x, u, u_1, u_2, \ldots, u_q), \Gamma_1, \ldots, \Gamma_q,$$

représentent les seconds membres de ses équations intégrales générales résolues par rapport à leurs $q+1$ *constantes arbitraires* C, C_1, ..., C_q (391*, IV), *l'intégrale générale de l'équation proposée* (1) *est la fonction implicite* u *de* x, u_1, u_2, ..., u_q, *fournie par la résolution de l'équation finie*

$$(4) \qquad \Omega(\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q) = 0,$$

où Ω *est une composante à choisir arbitrairement parmi celles donnant des fonctions composées dont les dérivées premières par rapport à* u *ne s'évanouissent pas.*

I. *L'intégrale particulière de l'équation* (1) *qui, pour* $x = x^{(0)}$, *prend la détermination initiale*

$$(5) \qquad u^{(0)} + \varphi(u_1, \ldots, u_q),$$

$u^{(0)}$ *désignant la valeur initiale de cette intégrale, considérée comme une constante arbitraire, et* $\varphi(u_1, \ldots, u_q)$ *une fonction (olotrope) donnée des seules variables paramétriques, s'annulant quand celles-ci prennent aussi leurs valeurs initiales* $u_1^{(0)}$, ... $u_q^{(0)}$, *est de la forme*

$$(6) \qquad u = \upsilon^{(0)}(x, u_1, \ldots, u_q, u^{(0)}),$$

où $\upsilon^{(0)}$ *est une fonction olotrope de* x, u_1, ..., u_q *et* $u^{(0)}$, *dont la dérivée par rapport à cette constante arbitraire n'est pas identiquement nulle.*

L'intégrale en question est fonction olotrope de x, u_1, ..., u_q, $u^{(0)}$ en vertu de la théorie générale (364*), (366*), parce qu'elle peut être considérée aussi comme appartenant, au même titre et avec la même détermination initiale (5), à un système immédiat où u serait la fonction inconnue, x la variable principale, u_1, ..., u_q, $u^{(0)}$ les variables paramétriques et qui contiendrait la seule équation (1) (*Cf.* 383*, I).

Le dernier point résulte de ce que pour $x = x^{(0)}$ l'intégrale (6) se réduit à la fonction (5), et qu'on a ainsi

$$\left(\frac{d\upsilon^{(0)}}{du^{(0)}}\right)_{x=x^{(0)}} = 1 \neq 0.$$

II. Il en résulte immédiatement (307*) que $\gamma(x, u, u_1, \ldots, u_q)$, expression fournie pour $u^{(0)}$ par la résolution de la relation (6), est une fonction olotrope de x, u, u_1, ..., u_q dont la dérivée par rapport à u ne peut s'évanouir (330*), et qu'ainsi *toute intégrale ordinaire u de l'équation* (1) *est donnée par la résolution d'une équation de la forme*

$$\gamma(x, u, u_1, \ldots, u_q) = u^{(0)}, \tag{7}$$

c'est-à-dire égalant à une constante arbitraire quelque fonction olotrope de x, u, u_1, ..., u_q dont la dérivée par rapport à u ne s'évanouit pas, jouissant en outre de la propriété de fournir des intégrales pour toute valeur de $u^{(0)}$.

III. *Toute fonction du genre de $\gamma(x, u, u_1, \ldots, u_q)$ satisfait à l'équation différentielle partielle à la variable principale x, aux variables paramétriques u, u_1, ..., u_q,*

$$\frac{d\gamma}{dx} = -\mathrm{A}\frac{d\gamma}{du} - \mathrm{A}_1\frac{d\gamma}{du_1} - \ldots - \mathrm{A}_q\frac{d\gamma}{du_q}, \tag{8}$$

linéaire comme la proposée (1), *mais en outre homogène et ne contenant plus dans ses coefficients* $-\mathrm{A}$, $-\mathrm{A}_1$, ..., $-\mathrm{A}_q$, *la nouvelle fonction inconnue* γ.

Soient

$$\mathrm{x},\ \mathrm{u},\ \mathrm{u}_1,\ \ldots,\ \mathrm{u}_q \tag{9}$$

des valeurs particulières de

(10) $$x, \quad u, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_q,$$

pour lesquelles on veut constater que l'équation (8) est satisfaite, et conservons la notation u pour celle des racines de l'équation

$$\gamma(x, u, u_1, \ldots, u_q) = \gamma(\mathrm{x}, \mathrm{u}, \mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_q)$$

qui prend la valeur u quand on fait

(11) $$x = \mathrm{x}, \qquad u_1 = \mathrm{u}_1, \qquad \ldots, \qquad u_q = \mathrm{u}_q.$$

Cette fonction satisfaisant à l'équation (1) comme nous venons de le constater (II), et la différentiation de l'équation précédente donnant

(12) $$\frac{du}{dx} = -\frac{\dfrac{d\gamma}{dx}}{\dfrac{d\gamma}{du}}, \qquad \frac{du}{du_1} = -\frac{\dfrac{d\gamma}{du_1}}{\dfrac{d\gamma}{du}}, \qquad \ldots, \qquad \frac{du}{du_q} = -\frac{\dfrac{d\gamma}{du_q}}{\dfrac{d\gamma}{du}},$$

elle satisfait aussi à l'équation (8), à condition toutefois que l'on y considère u non pas encore comme une nouvelle variable indépendante, mais toujours comme une fonction (implicite) de x, $u_1, \ldots, u_q$. Cela posé, si dans l'équation (8) envisagée de cette manière, on opère les attributions numériques (11), u prend la valeur u. Cette même équation subsiste donc pour les valeurs quelconques (9) des quantités (10) considérées comme les $q+2$ variables indépendantes de la fonction γ.

Il est évident en outre que γ *est une intégrale ordinaire de l'équation* (8); car u étant supposée telle pour l'équation proposée (1), les coefficients $A, A_1, \ldots, A_q$ sont tous olotropes pour les valeurs correspondantes de x, $u_1, \ldots, u_q$ et de u, lesquelles peuvent toutes être choisies à volonté à cause de la relation (7) et de l'indétermination absolue de $u^{(0)}$.

IV. Réciproquement, *toute intégrale ordinaire* γ *de l'équation* (8), *dont la dérivée par rapport à* u *ne s'évanouit pas, procure, quand on l'égale à une constante arbitraire* $u^{(0)}$, *une équation dont la racine* u *est, quelle que soit* $u^{(0)}$, *une intégrale ordinaire de l'équation proposée* (1).

La division de l'équation (8) par $-\frac{d\gamma}{du}$ et la prise en considération des formules (12) rendent ce point évident.

Ainsi donc, *pour obtenir toutes les intégrales ordinaires de l'équation proposée* (1), *il suffit de résoudre, par rapport à u, les équations formées en égalant à des constantes arbitraires toutes les intégrales ordinaires de l'équation* (8) *dont les dérivées par rapport à u ne s'évanouissent pas.*

V. *Les fonctions* (3) *sont précisément* $q+1$ *intégrales ordinaires de l'équation* (8) *dont le déterminant différentiel par rapport à* $u, u_1, \ldots, u_q$ *n'est pas identiquement nul.*

Nous avons fait depuis longtemps cette double constatation (389* *et suiv.*), (403*, IV).

VI. *Toute intégrale ordinaire* γ *de l'équation* (8) *se réduit à quelque fonction composée des fonctions* (3).

Car les $q+2$ équations linéaires

$$\begin{aligned}
&\frac{d\Gamma}{dx}+\frac{d\Gamma}{du}\mathrm{A}+\frac{d\Gamma}{du_1}\mathrm{A}_1+\ldots+\frac{d\Gamma}{du_q}\mathrm{A}_q=0,\\
&\frac{d\Gamma_1}{dx}+\frac{d\Gamma_1}{du}\mathrm{A}+\frac{d\Gamma_1}{du_1}\mathrm{A}_1+\ldots+\frac{d\Gamma_1}{du_q}\mathrm{A}_q=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d\Gamma_q}{dx}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0,\\
&\frac{d\gamma}{dx}+\frac{d\gamma}{du}\mathrm{A}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{d\gamma}{du_q}\mathrm{A}_q=0,
\end{aligned}$$

coexistant ainsi entre les $q+2$ quantités $1, \mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_q$ dont la première n'est pas nulle, entraînent l'identité

$$\begin{vmatrix}
\frac{d\Gamma}{dx} & \frac{d\Gamma}{du} & \frac{d\Gamma}{du_1} & \cdots & \frac{d\Gamma}{du_q}\\
\frac{d\Gamma_1}{dx} & \frac{d\Gamma_1}{du} & \cdots & \cdots & \frac{d\Gamma_1}{du_q}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{d\Gamma_q}{dx} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{d\Gamma_q}{du_q}\\
\frac{d\gamma}{dx} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{d\gamma}{du_q}
\end{vmatrix}=0,$$

en vertu de laquelle (314*) γ est fonction composée de $\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_q$, puisque le déterminant différentiel de ces $q+1$ fonctions pris

par rapport à u, u_1, ..., u_q ne s'évanouit pas identiquement (V).

VII. *Si* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ *sont des intégrales particulières quelconques de l'équation* (8), *toute fonction composée d'elles* $\gamma = \omega(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k)$ *en est une aussi.*

Car le résultat de la substitution de γ dans l'équation (8) est évidemment aussi ce qu'on obtient en ajoutant membre à membre, après les avoir multipliés par $\frac{\partial\omega}{\partial\gamma_1}, \frac{\partial\omega}{\partial\gamma_2}, \ldots, \frac{\partial\omega}{\partial\gamma_k}$, ceux de la substitution de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ respectivement, dont chacun par hypothèse a ses deux membres identiquement égaux.

VIII. Le rapprochement de ces diverses conclusions assure enfin l'exactitude de notre énoncé; car la fonction composée

$$\Omega(\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_q)$$

ne renfermant, quelle que soit la composante Ω, que des intégrales de l'équation (8) (V), (VII), et pouvant coïncider avec l'une quelconque d'entre elles moyennant un choix convenable de cette composante (VI), l'équation finie (4) (que l'indétermination de Ω confond avec ce qu'elle deviendrait par la substitution d'une constante arbitraire à zéro dans son second membre) ne donnera pour u, si toutefois Ω est d'une nature telle que la dérivée de son premier membre par rapport à u ne s'évanouisse pas et qu'ainsi sa résolution normale soit possible, que des intégrales de l'équation proposée (1) (IV), et les fournira toutes (III).

72. Il est facile, en outre, de trouver la détermination de la composante Ω, qui assure à la racine u de l'équation (4) une détermination initiale donnée $\varkappa(u_1, u_2, \ldots, u_q)$ pour $x = x^{(0)}$.

Comme le déterminant différentiel des fonctions (3) par rapport à $u, u_1, \ldots, u_q$ ne s'évanouit pas (71, V), la résolution normale par rapport à ces $q+1$ quantités, des $q+1$ équations simultanées

$$(13)\quad \begin{cases} \Gamma\,(x^{(0)}, u, u_1, \ldots, u_q) = \chi, \\ \Gamma_1(x^{(0)}, u, u_1, \ldots, u_q) = \chi_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Gamma_q(x^{(0)}, u, u_1, \ldots, u_q) = \chi_q, \end{cases}$$

est possible, et donne pour elles des fonctions olotropes des $q+1$ nouvelles variables $\chi, \chi_1, \ldots, \chi_q$ (307*). Si donc on porte ces

fonctions implicites dans la fonction

(14) $$u - \aleph(u_1, u_2, \ldots, u_q),$$

on obtiendra une certaine fonction composée olotrope de χ, $\chi_1, \ldots, \chi_q$,

(15) $$\Omega(\chi, \chi_1, \ldots, \chi_q),$$

et il suffira de prendre $\Omega = 0$. Car la fonction (14) étant évidemment régénérée par la substitution inverse des premiers membres des équations (13) à χ, χ_1, ..., χ_q dans l'expression (15), il viendra nécessairement, pour $x = x^{(0)}$,

$$\Omega(\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_q) = u - \aleph(u_1, u_2, \ldots, u_q),$$

moyennant quoi, dans la même hypothèse, l'équation (4) devient

$$u - \aleph(u_1, u_2, \ldots, u_q) = 0,$$

donnant bien $u = \aleph(u_1, u_2, \ldots, u_q)$ comme on le voulait.

73. Les éléments d'indétermination comportés par l'*équation intégrale générale* (4) sont ceux d'une fonction olotrope arbitraire de q variables, les coefficients de son développement par la série de Taylor si on le veut. La composante Ω contient, il est vrai, $q+1$ variables, mais une infinité de ses déterminations donnent à la résolution la même intégrale u que si l'on tirait cette fonction de l'équation formée, par exemple, en égalant simplement une des fonctions (3) à une fonction composée des q autres seulement. Les éléments dont il s'agit sont donc en nombre illimité. Néanmoins, *on peut, comme dans la théorie des équations différentielles totales* (394*), *en éliminer la totalité entre les équations provenant de la différentiation de l'équation* (4), *et régénérer ainsi l'équation différentielle primitive* (1).

Ces différentiations faites successivement par rapport à x, u_1, u_2, ..., u_q donnent effectivement les $q+1$ équations

(16) $$\begin{cases} \dfrac{d\Omega}{d\Gamma}\left(\dfrac{d\Gamma}{dx} + \dfrac{d\Gamma}{du}\dfrac{du}{dx}\right) + \dfrac{d\Omega}{d\Gamma_1}\left(\dfrac{d\Gamma_1}{dx} + \dfrac{d\Gamma_1}{du}\dfrac{du}{dx}\right) + \ldots + \dfrac{d\Omega}{d\Gamma_q}\left(\dfrac{d\Gamma_q}{dx} + \dfrac{d\Gamma_q}{du}\dfrac{du}{dx}\right) = 0, \\ \dfrac{d\Omega}{d\Gamma}\left(\dfrac{d\Gamma}{du_1} + \dfrac{d\Gamma}{du}\dfrac{du}{du_1}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d\Omega}{d\Gamma}\left(\dfrac{d\Gamma}{du_q} + \dfrac{d\Gamma}{du}\dfrac{du}{du_q}\right) + \dfrac{d\Omega}{d\Gamma_1}\left(\dfrac{d\Gamma_1}{du_q} + \dfrac{d\Gamma_1}{du}\dfrac{du}{du_q}\right) + \ldots + \dfrac{d\Omega}{d\Gamma_q}\left(\dfrac{d\Gamma_q}{du_q} + \dfrac{d\Gamma_q}{du}\dfrac{du}{du_q}\right) = 0, \end{cases}$$

linéaires et homogènes par rapport aux $q+1$ dérivées partielles $\frac{d\Omega}{d\Gamma}, \frac{d\Omega}{d\Gamma_1}, \ldots, \frac{d\Omega}{d\Gamma_q}$ dans lesquelles les éléments d'indétermination de l'équation (4) se trouvent maintenant exclusivement rassemblés. Comme ces dérivées partielles ne peuvent être toutes identiquement nulles, sans quoi, et contrairement aux prescriptions du théorème du n° 71, celle du premier membre de l'équation (4) prise par rapport à u le serait aussi, il faut que Θ déterminant de leurs coefficients dans le système (16) le soit, ce qui donne l'équation

$$(17) \qquad \Theta = 0,$$

pour résultat de l'élimination voulue. Le développement de Θ conduit à un polynôme entier en

$$(18) \qquad \frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{du_1}, \quad \ldots, \quad \frac{du}{du_q},$$

où le terme indépendant de ces dérivées est Δ déterminant des premiers termes des binômes entre parenthèses dans les équations (16), où les premières puissances de ces dérivées sont multipliées par

$$\Delta_0, \quad \Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \ldots, \quad \Delta_q,$$

déterminants en lesquels se change Δ par la substitution de la file

$$(19) \qquad \frac{d\Gamma}{du}, \quad \frac{d\Gamma_1}{du}, \quad \ldots, \quad \frac{d\Gamma_q}{du}$$

à ses lignes de rangs $1, 2, \ldots, q+1$ respectivement. En outre, les termes non linéaires, par rapport aux dérivées (18), s'évanouissent tous parce que chacun d'eux contient comme facteur ce que devient Δ par la substitution de la même file (19) à plusieurs de ses lignes simultanément. Comme enfin Δ_0 ne peut s'évanouir (71, V), l'équation (17) se met sous la forme

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\Delta}{\Delta_0} - \frac{\Delta_1}{\Delta_0}\frac{du}{du_1} - \ldots - \frac{\Delta_q}{\Delta_0}\frac{du}{du_q},$$

qui est identique à (1); effectivement la théorie générale des équations différentielles totales (392*) donne pour le système (2), dont les équations intégrales générales se forment en égalant à

des constantes arbitraires les fonctions (3), les $q+1$ identités

$$\frac{d\Gamma}{dx}+\frac{d\Gamma}{du}\Lambda+\frac{d\Gamma}{du_1}\Lambda_1+\ldots+\frac{d\Gamma}{du_q}\Lambda_q=0,$$
$$\frac{d\Gamma_1}{dx}+\frac{d\Gamma_1}{du}\Lambda+\frac{d\Gamma_1}{du_1}\Lambda_1+\ldots+\frac{d\Gamma_1}{du_q}\Lambda_q=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d\Gamma_q}{dx}+\frac{d\Gamma_q}{du}\Lambda+\frac{d\Gamma_q}{du_1}\Lambda_1+\ldots+\frac{d\Gamma_q}{du_q}\Lambda_q=0,$$

conduisant immédiatement à

$$\frac{\Delta}{\Delta_0}=-\Lambda,\qquad \frac{\Delta_1}{\Delta_0}=\Lambda_1,\qquad \ldots,\qquad \frac{\Delta_q}{\Delta_0}=\Lambda_q.$$

74. La méthode précédente est celle de Jacobi, sauf certaines modifications dans l'exposition. Si nous n'avions dû abréger, nous aurions fait voir qu'elle procure encore l'intégration d'un système immédiat passif et linéaire à une seule fonction inconnue, *offrant un nombre quelconque de variables principales.* La seule différence consiste en ce que le système auxiliaire (2) d'équations différentielles totales comporte non plus une seule, mais *plusieurs* variables principales toujours en même nombre que pour le système donné à intégrer. Les choses se passent néanmoins de la même manière, parce qu'il jouit aussi de la passivité supposée au proposé (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure,* 3ᵉ série, t. VII, 1890).

Équations non linéaires.

75. La réduction mentionnée à la fin du n° 70 a été opérée par Cauchy dans le cas encore où il s'agit *d'une équation aux dérivées partielles non linéaires,* mais toujours unique et à une seule fonction inconnue. En appelant u cette dernière, x la variable principale, et y la variable paramétrique que nous supposerons unique pour simplifier notre exposition, l'équation à intégrer rendue immédiate a la forme

$$(1)\qquad \frac{du}{dx}=f\left(x, y, u, \frac{du}{dy}\right),$$

où f est une composante donnée, et donne lieu au théorème suivant :

On obtient l'intégrale ordinaire u caractérisée par la détermination initiale

$$u = \varphi(y), \quad \text{pour} \quad x = x_0, \tag{2}$$

en écrivant le système immédiat auxiliaire d'équations différentielles totales

$$\frac{du}{dx} = f(x, y, u, q) - qf'_q, \qquad \frac{dq}{dx} = f'_y + qf'_u, \qquad \frac{dy}{dx} = -f'_q,$$

aux fonctions inconnues u, q, y de la seule variable x, puis en calculant ses intégrales générales

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{U}(x, u_0, q_0, y_0), \\ q &= \mathrm{Q}(x, u_0, q_0, y_0), \\ y &= \mathrm{H}(x, u_0, q_0, y_0), \end{aligned}$$

contenant comme constantes arbitraires les valeurs initiales indéterminées u_0, q_0, y_0 qu'elles prennent pour $x = x_0$, puis enfin en portant dans l'équation

$$u = \mathrm{U}[x, \varphi(\eta), \varphi'(\eta), \eta]$$

la fonction implicite η de x, y qui satisfait à l'équation

$$y = \mathrm{H}[x, \varphi(\eta), \varphi'(\eta), \eta] \tag{3}$$

et se réduit à y pour $x = x_0$.

I. Nous exécuterons d'abord la transformation expliquée aux nos 365* et suivants pour substituer à l'équation proposée (1), non linéaire, le système immédiat, passif mais linéaire [et régulier (360*)]

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{du}{dx} = f(x, y, u, q), \qquad \frac{dq}{dx} = f'_y + qf'_u + f'_q \frac{dq}{dy}, \\ &\frac{du}{dy} = q, \qquad \text{—————————}, \end{aligned} \right. \tag{4}$$

comportant, outre u dont y est devenue une seconde variable principale, la fonction inconnue auxiliaire q pour laquelle x est principale et y paramétrique.

Et en appelant y_0 la valeur initiale choisie pour y, les condi-

tions initiales à annexer à ce système seront évidemment

$$u = \varphi(y_0), \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \end{cases}$$
$$q = \varphi'(y), \quad \text{pour} \quad x = x_0.$$

II. Nous transformerons ensuite le système (4) par la substitution

$$(5) \qquad \begin{cases} x = \xi, \\ y = h(\xi, \eta), \end{cases}$$

où ξ, η sont de nouvelles variables indépendantes, et $h(\xi, \eta)$ une fonction de toutes deux, provisoirement indéterminée sauf la condition d'être olotrope dans le voisinage de leurs valeurs particulières $\xi_0 (= x_0)$, η_0 donnant $\xi_0 = x_0$, $h(\xi_0, \eta_0) = y_0$ et d'y avoir sa dérivée partielle $\frac{dh}{d\eta}$ non nulle.

Par application de la règle du n° 326*, ou bien à cause des formules

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\omega}{d\xi} = \dfrac{d\omega}{dx} + \dfrac{d\omega}{dy}\dfrac{dh}{d\xi}, \\ \dfrac{d\omega}{d\eta} = \dfrac{d\omega}{dy}\dfrac{dh}{d\eta}, \end{cases}$$

évidentes pour la substitution (5), exécutée dans toute fonction ω de x, y, cette transformation du système (4) conduit à

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{d\xi} = f(\xi, h, u, q) + q\dfrac{dh}{d\xi}, \quad \dfrac{dq}{d\xi} = f'_y(\xi, h, u, q) + q f'_u(\xi, h, u, q) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \dfrac{f'_q(\xi, h, u, q) - \dfrac{dh}{d\xi}}{\dfrac{dh}{d\eta}}\dfrac{dq}{d\eta}, \\ \dfrac{du}{d\eta} = q\dfrac{dh}{d\eta}. \end{cases}$$

En assujettissant enfin la fonction $h(\xi, \eta)$, jusqu'ici indéterminée, à annuler le coefficient de $\frac{dq}{d\eta}$ dans l'équation de la seconde colonne, les trois fonctions de ξ, η représentées actuellement par les lettres u, q, h devront satisfaire aux conditions simultanées

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{d\xi} = f(\xi, h, u, q) + q\dfrac{dh}{d\xi}, & \dfrac{dq}{d\xi} = f'_y(\xi, h, u, q) \\ & \qquad + q f'_u(\xi, h, u, q), \quad \dfrac{dh}{d\xi} = -f'_q(\xi, h, u, q), \\ \dfrac{du}{d\eta} = q\dfrac{dh}{d\eta}, \end{cases}$$

dont l'ensemble équivaut au système immédiat, encore linéaire et toujours régulier,

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{du}{d\xi} = f(\xi, h, u, q) - q f'_q(\xi, h, u, q), & & \dfrac{dq}{d\xi} = - f'_\xi(\xi, h, u, q) \\ & - q f'_u(\xi, h, u, q), & \dfrac{dh}{d\xi} = - f'_q(\xi, h, u, q) \\ \dfrac{du}{d\eta} = q\,\dfrac{dh}{d\eta}, & & \end{array}\right.$$

De plus, on devra s'imposer les déterminations initiales

$$u = \varphi[h(\xi_0, \eta_0)], \qquad \text{pour} \quad \left\{\begin{array}{l} \xi = \xi_0, \\ \eta = \eta_0, \end{array}\right.$$

$$q = \varphi'[h(\xi_0, \eta)], \qquad \text{pour} \quad \xi = \xi_0.$$

Celle de $h(\xi, \eta)$ pour $\xi = \xi_0$ demeurant arbitraire, nous la prendrons égale à η, d'où les conditions initiales à annexer définitivement au système immédiat (9)

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{ll} u = \varphi(\eta_0), & \text{pour} \quad \left\{\begin{array}{l} \xi = \xi_0, \\ \eta = \eta_0, \end{array}\right. \\ \left.\begin{array}{l} q = \varphi'(\eta) \\ h = \quad \eta \end{array}\right\} & \text{pour} \quad \xi = \xi_0. \end{array}\right.$$

III. Inversement, il est clair que si les trois fonctions u, q, h de ξ, η satisfont au système (9), elles jouiront de la même propriété pour (8), puis pour (7), et qu'ainsi, en vertu des formules générales (6), l'inversion de la transformation (5) changera u, q en un couple d'intégrales du système (4), u par suite en une intégrale de l'équation proposée (1).

Il est clair, en outre, que la condition initiale (2) sera remplie: car, pour $x = x_0$, la première des formules (5) donne $\xi = x_0 = \xi_0$, et la seconde par suite $\eta = y$ à cause de la dernière des conditions (10), d'où $\eta_0 = y_0$. Ces mêmes conditions (10) donneront ainsi, pour $x = x_0$, $y = y_0$,

$$u = \varphi(\eta_0) = \varphi(y_0),$$

puis pour $x = x_0$ seulement, et cela quelle que soit y,

$$q = \varphi'(\eta) = \varphi'(y),$$

d'où $u = \varphi(y)$ à cause de l'équation écrite dans la seconde ligne du Tableau (4).

Pour obtenir l'intégrale voulue de l'équation proposée (1), *il suffit donc de chercher celles des intégrales* $u(\xi, \eta_1)$, $q(\xi, \eta_1)$, $h(\xi, \eta_1)$ *du système* (9), *que précisent les conditions annexes* (10), *de prendre la dernière* $h(\xi, \eta_1)$ *pour construire la seconde formule du Tableau* (5), *puis d'inverser cette transformation sur la première intégrale* $u(\xi, \eta_1)$.

IV. Les équations écrites dans la première ligne du Tableau (9) et prises seules, constituant évidemment un système aux différentielles totales, à la variable unique ξ, peuvent être intégrées séparément; et, comme η_1 n'y figure pas explicitement, leurs intégrales générales sont des formes

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{U}(\xi, u_0, q_0, h_0), \\ q &= \mathrm{Q}(\xi, u_0, q_0, h_0), \\ h &= \mathrm{H}(\xi, u_0, q_0, h_0), \end{aligned}$$

où u_0, q_0, h_0 représentent leurs valeurs initiales pour $\xi = \xi_0$, et par suite des fonctions de η_1 seulement, à déterminer ensuite de manière que l'équation unique de la seconde ligne soit aussi vérifiée et que les conditions initiales (10) soient satisfaites.

Ces conditions conduisent de suite à prendre

$$u_0 = \vartheta(\eta_1), \qquad q_0 = \upsilon'(\eta_1), \qquad h_0 = \eta_1,$$

$\vartheta(\eta_1)$ désignant quelque fonction de η_1 se réduisant à $\upsilon(\eta_{10})$ pour $\eta_1 = \eta_{10}$. Et, comme pour $\xi = \xi_0$ on a ainsi

$$u = \vartheta(\eta_1), \qquad q = \upsilon'(\eta_1), \qquad h = \eta_1,$$

d'où

$$\frac{du}{d\eta_1} = \vartheta'(\eta_1), \qquad \frac{dh}{d\eta_1} = 1,$$

et que la dernière équation du système (9) doit être vérifiée pour cette valeur spéciale de ξ en particulier, il faut qu'on ait, quelle que soit η_1,

$$\vartheta'(\eta_1) = \upsilon'(\eta_1),$$

par suite $\vartheta(\eta_1) = \upsilon(\eta_1)$ puisqu'on a déjà $\vartheta(\eta_{10}) = \upsilon(\eta_{10})$.

Les intégrales du système (9) répondant aux conditions

initiales (10) ne peuvent être ainsi que

$$(11)\quad \begin{cases} u = \mathrm{U}[\xi, \varphi(\eta), \varphi'(\eta), \eta], \\ q = \mathrm{Q}[\xi, \varphi(\eta), \varphi'(\eta), \eta], \\ h = \mathrm{H}[\xi, \varphi(\eta), \varphi'(\eta), \eta]. \end{cases}$$

V. La *certitude* que l'équation proposée (1) possède l'intégrale particulière précisée par la condition (2), combinée avec *l'impossibilité* pour le système équivalent (9) et les conditions initiales annexes (10) d'être vérifiées par d'autres fonctions que (11), donne à elle seule l'assurance que ces fonctions satisfont effectivement aux équations et conditions dont il s'agit. Mais il est facile aussi de constater *a posteriori* que l'on a bien identiquement

$$(12)\qquad \frac{du}{d\eta} - q\,\frac{dh}{d\eta} = 0,$$

seul point dont jusqu'ici nous n'ayons pas fait la constatation directe, sauf pour $x = x_0$, η quelconque.

Les fonctions (11), satisfaisant aux équations de la première ligne du Tableau (9), vérifient également celles équivalentes de la même ligne du Tableau (8) dont la première différentiée par rapport à η donne

$$\frac{d^2 u}{d\xi\,d\eta} = f'_y(\xi, h, u, q)\,\frac{dh}{d\eta} + f'_u(\xi, h, u, q)\,\frac{du}{d\eta} + f'_q(\xi, h, u, q)\,\frac{dq}{d\eta} + \frac{dq}{d\eta}\,\frac{dh}{d\xi} + q\,\frac{d^2 h}{d\xi\,d\eta},$$

puis par sa combinaison avec la dernière équation de la même ligne

$$(13)\quad \frac{d^2 u}{d\xi\,d\eta} = f'_y(\xi, h, u, q)\,\frac{dh}{d\eta} + f'_u(\xi, h, u, q)\,\frac{du}{d\eta} + q\,\frac{d^2 h}{d\xi\,d\eta}.$$

On a, d'autre part,

$$\frac{d}{d\xi}\left(q\,\frac{dh}{d\eta}\right) = \frac{dq}{d\xi}\,\frac{dh}{d\eta} + q\,\frac{d^2 h}{d\xi\,d\eta},$$

d'où, en ayant égard à la seconde équation de la ligne considérée,

$$(14)\ \frac{d}{d\xi}\left(q\,\frac{dh}{d\eta}\right) = f'_y(\xi, h, u, q)\,\frac{dh}{d\eta} + q f'_u(\xi, h, u, q)\,\frac{dh}{d\eta} + q\,\frac{d^2 h}{d\xi\,d\eta},$$

puis, en retranchant membre à membre les équations (13), (14), et appelant Δ le premier membre de (12),

$$\frac{d\Delta}{d\xi} = f'_u(\xi, h, u, q)\Delta.$$

La substitution à h, u, q de leurs expressions (11) change $f''_u(\xi, h, u, q)$ en une fonction connue $F(\xi, \eta_1)$ de ξ, η_1, et l'équation précédente en

$$\frac{d\Delta}{d\xi} = F(\xi, \eta_1)\Delta.$$

Celle-ci étant du premier ordre, linéaire et homogène, par rapport à la fonction Δ dont la variable principale ξ est accompagnée de la variable paramétrique η_1, on trouvera, en ordonnant le développement de Δ par rapport aux puissances de $(\xi - \xi_0)$ et en raisonnant à fort peu près comme au n° 41, IV, que son intégrale générale est de la forme

$$(15) \qquad \Delta = \Delta_0(\eta_1)\delta(\xi, \eta_1),$$

où $\delta(\xi, \eta_1)$ représente une fonction de ξ, η_1 déterminée par la nature de $F(\xi, \eta_1)$, et $\Delta_0(\eta_1)$ la fonction de η_1 seulement à laquelle doit se réduire Δ pour $\xi = \xi_0$. Mais, comme les fonctions (11) vérifient déjà l'équation (12) pour $\xi = \xi_0$, il faut prendre $\Delta_0(\eta_1) = 0$ quelle que soit η_1, moyennant quoi l'équation (15) donne $\Delta = 0$, quelles que soient ξ, η_1, c'est-à-dire l'équation (12) dont nous voulions contrôler l'exactitude.

VI. L'inversion de la transformation (5) donnant $\xi = x$, $h(\xi, \eta_1) = y$, la dernière des formules (11) conduit, pour l'expression de η_1 en x, y, à la racine de l'équation (3) dont y est la valeur initiale pour $x = x_0$. On obtiendra donc l'intégrale cherchée de l'équation (1) en portant cette racine dans la première de ces mêmes formules (11), après y avoir substitué x à ξ, c'est-à-dire en suivant les prescriptions de notre énoncé.

76. Cette méthode, donnée par Cauchy pour un nombre quelconque de variables paramétriques (son exposition ne différerait de la précédente que par de simples longueurs), s'étendrait facilement, sans aucun doute, comme celle propre à l'équation linéaire

(74, *in fine*), au cas où, au lieu d'être unique, l'équation (1) serait accompagnée d'autres semblables quelconques mais formant avec elle un système immédiat passif, à une seule fonction inconnue toujours, mais à plusieurs variables principales. Cette extension, poussée jusqu'aux systèmes immédiats à *plusieurs* fonctions inconnues, fournirait évidemment la solution générale, toujours désirée, du problème de l'intégration des équations différentielles partielles. Mais elle n'est peut-être pas réalisable.

La même méthode s'applique évidemment aux équations traitées dans le premier paragraphe de ce Chapitre; seulement la transformation préalable que nous avons dû exécuter dans l'alinéa I du numéro précédent devient inutile puisque l'équation à intégrer est donnée linéaire, et une substitution analogue à (5) conduit immédiatement au système auxiliaire d'équations différentielles totales. On retombe facilement ensuite sur les formules de Jacobi, que nous aurions pu ainsi nous dispenser de reproduire si leur élégance n'avait pas légitimé l'usage contraire.

77. Les considérations suivantes se rattachent encore à la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Étant donnée une équation quelconque de ce genre

$$(16)\qquad \frac{du}{dx} = f\left(x, y, z, \ldots, t, u, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \ldots, \frac{du}{dt}\right),$$

à la fonction inconnue u de la variable principale x et des $h-1$ variables paramétriques $y, z, \ldots, t$, on nomme *intégrale complète* toute intégrale ordinaire

$$(17)\qquad \varphi(x, y, z, \ldots, t, \mathrm{U}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \ldots, \mathrm{S}),$$

fonction olotrope de $x, y, z, \ldots, t$ et de h constantes arbitraires U, Q, R, ..., S, fournissant en outre, elle et ses $h-1$ dérivées premières $\varphi'_y, \varphi'_z, \ldots, \varphi'_t$ prises par rapport aux variables paramétriques $y, z, \ldots, t$, un système de h fonctions dont le déterminant différentiel par rapport à U, Q, R, ..., S ne s'évanouit pas identiquement. Si, par exemple, on nomme x_0 la valeur initiale de x, puis $y_0, z_0, \ldots, t_0$ celles des variables paramétriques, puis $u_0, q_0, r_0, \ldots, s_0$ des indéterminées en nombre h, ne prenant toutefois que des valeurs tombant avec les précé-

dentes dans les limites où la composante f demeure olotrope, puis enfin $\varphi(y, z, \ldots, t)$ une fonction déterminée des variables paramétriques ayant avec ses dérivées premières des valeurs initiales toutes nulles, on aperçoit immédiatement que l'intégrale ordinaire de l'équation (16), caractérisée par la détermination initiale

$$(18)\quad u_0 + q_0(y-y_0) + r_0(z-z_0) + \ldots + s_0(t-t_0) + \varphi(y, z, \ldots, t),$$

jouit de ces diverses propriétés relativement aux constantes arbitraires $u_0, q_0, r_0, \ldots, s_0$ représentant ici les valeurs initiales de l'intégrale considérée et de ses $h-1$ dérivées paramétriques. Un raisonnement tout semblable à celui du n° 383*, I, utilisé déjà au n° 71, I, montre effectivement que cette intégrale est fonction olotrope de $x, y, z, \ldots, t, u_0, q_0, \ldots, s_0$. Quant au déterminant différentiel à considérer, il ne peut s'évanouir identiquement, puisque, pour $x = x_0$, il se réduit à celui de la fonction (18) et de ses dérivées par rapport à $y, z, \ldots, t$, c'est-à-dire à 1 évidemment.

Il résulte immédiatement de cette définition que le système des h équations finies

$$(19)\quad \begin{cases} u = \varphi\ (x, y, z, \ldots, t, U, Q, R, \ldots, S), \\ q = \varphi'_y(x, y, z, \ldots, t, U, Q, R, \ldots, S), \\ r = \varphi'_z(x, y, z, \ldots, t, U, Q, R, \ldots, S), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s = \varphi'_t(x, y, z, \ldots, t, U, Q, R, \ldots, S), \end{cases}$$

est déterminé et qu'il peut être résolu normalement par rapport à U, Q, R, ..., S, en fournissant pour elles des fonctions olotropes de $u, q, r, \ldots, s$ considérées un instant comme h variables indépendantes (307*); il en résulte par suite qu'on peut assigner à ces constantes arbitraires des valeurs telles, que l'intégrale complète (17) et ses $h-1$ dérivées paramétriques prennent pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, ..., $t = t_0$ des valeurs initiales $u_0, q_0, r_0, \ldots, t_0$ choisies à volonté.

78. *Si dans la première des équations* (19), *différentiée par rapport à* x,

$$(20)\quad \frac{du}{dx} = \varphi'_x(x, y, z, \ldots, t, U, Q, R, \ldots, S),$$

on substitue à U, Q, R, ..., S *d'une part leurs expressions en* $x, y, z, \ldots, t, u, q, r, \ldots, s$ *tirées de ces mêmes équations comme nous venons de l'expliquer, à* $\frac{du}{dx}$ *d'autre part, l'expression* $f(x, y, z, \ldots, t, u, q, r, \ldots, s)$, *second membre de l'équation* (16), *on obtient une identité entre*

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t, \quad u, \quad q, \quad r, \quad \ldots, \quad s$$

considérées comme autant de variables indépendantes.

On prouvera effectivement que la relation en question a lieu numériquement pour les valeurs particulières quelconques

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}, \quad \ldots, \quad \mathrm{t}, \quad \mathrm{u}, \quad \mathrm{q}, \quad \mathrm{r}, \quad \ldots, \quad \mathrm{s},$$

attribuées à ces quantités, en faisant intervenir la détermination u de l'intégrale complète (17) qui, pour $x = \mathrm{x}$, $y = \mathrm{y}$, $z = \mathrm{z}$, ..., $t = \mathrm{t}$, prend elle-même, et ses dérivées paramétriques, les valeurs u, q, r, ..., s, puis en raisonnant exactement comme au n° 392*. (*Cf.* 71, III).

On régénère donc l'équation aux dérivées partielles originaire (16) *en portant dans l'équation* (20) *les expressions de* U, Q, R, ... S *tirées des équations*

$$(21)\quad \begin{cases} u = \varphi\,(x, y, z, \ldots, t, \mathrm{U}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \ldots, \mathrm{S}), \\ \dfrac{du}{dy} = \varphi'_y(x, y, z, \ldots, t, \mathrm{U}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \ldots, \mathrm{S}), \\ \dfrac{du}{dz} = \varphi'_z(x, y, z, \ldots, t, \mathrm{U}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \ldots, \mathrm{S}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{du}{dt} = \varphi'_t(x, y, z, \ldots, t, \mathrm{U}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \ldots, \mathrm{S}), \end{cases}$$

c'est-à-dire en éliminant ces constantes arbitraires entre toutes les équations (20) *et* (21), *dont l'une est la formule fournissant l'intégrale complète et dont les autres se forment en la différentiant une fois par rapport à toutes les variables, successivement et indistinctement.*

79. La propriété la plus importante des intégrales complètes consiste en ce que, une seule (17) étant connue, on peut en

déduire toutes les intégrales ordinaires de l'équation aux dérivées partielles (16) par une méthode offrant une très grande analogie avec celle de la *Variation des constantes arbitraires* (48). On a effectivement le théorème suivant :

Pour obtenir toutes les intégrales de l'équation (16), *on formera tous les systèmes de* $p(\leqq h)$ *équations finies*

$$(22) \qquad \Omega_1(\mathrm{U}, \mathrm{Q}, \ldots, \mathrm{T}, \mathrm{V}, \ldots, \mathrm{S}) = 0, \qquad \Omega_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Omega_p = 0,$$

entre les quantités U, Q, ..., S, *considérées maintenant comme des fonctions de* $x, y, \ldots, t$, *dont les premiers membres remplissent la seule condition d'avoir, par rapport à quelque groupe*

$$(23) \qquad \mathrm{U}, \quad \mathrm{Q}, \quad \ldots, \quad \mathrm{T},$$

de p *de ces* h *quantités, un déterminant différentiel non identiquement nul; à ces équations on adjoindra les* $k = h - p$ *autres*

$$(24) \qquad \Delta_1(x, y, \ldots, t, \mathrm{U}, \mathrm{Q}, \ldots, \mathrm{S}) = 0, \qquad \Delta_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta_k = 0,$$

ayant pour premiers membres les déterminants des éléments du Tableau de $p+1$ *lignes*

$$(25) \left\{ \begin{array}{llllll} \dfrac{d\omega(x, y, \ldots, t, \mathrm{U}, \ldots, \mathrm{S})}{d\mathrm{U}}, & \dfrac{d\omega}{d\mathrm{Q}}, \;\ldots, & \dfrac{d\omega}{d\mathrm{T}}, & \dfrac{d\omega}{d\mathrm{V}}, & \ldots, & \dfrac{d\omega}{d\mathrm{S}}, \\ \dfrac{d\Omega_1(\mathrm{U}, \mathrm{Q}, \ldots, \mathrm{T}, \mathrm{V}, \ldots, \mathrm{S})}{d\mathrm{U}}, & \dfrac{d\Omega_1}{d\mathrm{Q}}, \;\ldots, & \dfrac{d\Omega_1}{d\mathrm{T}}, & \dfrac{d\Omega_1}{d\mathrm{V}}, & \ldots, & \dfrac{d\Omega_1}{d\mathrm{S}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{d\Omega_p(\mathrm{U}, \mathrm{Q}, \ldots, \mathrm{T}, \mathrm{V}, \ldots, \mathrm{S})}{d\mathrm{U}}, & \dfrac{d\Omega_p}{d\mathrm{Q}}, \;\ldots, & \dfrac{d\Omega_p}{d\mathrm{T}}, & \dfrac{d\Omega_p}{d\mathrm{V}}, & \ldots, & \dfrac{d\Omega_p}{d\mathrm{S}}, \end{array} \right.$$

contenus dans toutes les associations possibles des p *premières colonnes avec chacune des* $k = h - p$ *autres; dans l'expression* (17) *enfin, on substituera à* U, Q, ..., S *les fonctions de* $x, y, \ldots, t$ *fournies pour elles par la résolution du système des équations* (22) *et* (24).

I. *Une intégrale donnée quelconque de l'équation* (16) *peut être obtenue par la substitution à* U, Q, ..., S, *dans l'expression* (17), *de fonctions de* $x, y, \ldots, t$ *vérifiant certaines équations finies des formes* (22) *et* (24).

En supposant que u, dans les premiers membres des équations (21), représente l'intégrale considérée, l'expression (17) ne peut manquer de reproduire cette intégrale, si l'on y met pour U, Q, ..., S leurs expressions en x, y, ..., t fournies par la résolution des équations dont il s'agit. Mais, en différentiant la première par rapport à x, il vient

$$\frac{du}{dx} = \varphi'_x(x, y, z, \ldots, t, \mathrm{U}, \mathrm{Q}, \ldots, \mathrm{S}) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{U}} \frac{d\mathrm{U}}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{Q}} \frac{d\mathrm{Q}}{dx} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{S}} \frac{d\mathrm{S}}{dx} \right),$$

d'où la relation

$$(26) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{U}} \frac{d\mathrm{U}}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{Q}} \frac{d\mathrm{Q}}{dx} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{S}} \frac{d\mathrm{S}}{dx} = 0,$$

ayant lieu quelles que soient x, y, z, ..., t.

Effectivement les racines

$$(27) \qquad \mathrm{U}, \quad \mathrm{Q}, \quad \ldots, \quad \mathrm{S}$$

des équations (21), quand on les porte dans

$$\varphi'_x(x, y, z, \ldots, t, \mathrm{U}, \mathrm{Q}, \ldots, \mathrm{S}) \qquad (18),$$

régénèrent le second membre de l'équation (16), lequel est ici identiquement égal à $\frac{du}{dx}$ parce que u représente une intégrale de cette dernière équation.

En différentiant ensuite la même première équation (21) par rapport à y, z, ..., t successivement, puis ayant égard aux autres équations du groupe dont elle fait partie, on trouve immédiatement les nouvelles relations

$$(28) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{U}} \dfrac{d\mathrm{U}}{dy} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{Q}} \dfrac{d\mathrm{Q}}{dy} + \ldots + \dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{S}} \dfrac{d\mathrm{S}}{dy} = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{U}} \dfrac{d\mathrm{U}}{dz} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{Q}} \dfrac{d\mathrm{Q}}{dz} + \ldots + \dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{S}} \dfrac{d\mathrm{S}}{dz} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{U}} \dfrac{d\mathrm{U}}{dt} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{Q}} \dfrac{d\mathrm{Q}}{dt} + \ldots + \dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{S}} \dfrac{d\mathrm{S}}{dt} = 0. \end{array} \right.$$

Les dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{U}}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{Q}}$, ..., $\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{S}}$ ne pouvant toutes s'évanouir, puisque autrement et contrairement à la définition de l'intégrale

complète le déterminant différentiel mentionné au n° 77 s'évanouirait aussi, les h équations (26), (28), linéaires et homogènes, par rapport à ces h dérivées, entraînent l'identité

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dU}{dy} & \frac{dU}{dz} & \cdots & \frac{dU}{dt} \\ \frac{dQ}{dx} & \frac{dQ}{dy} & \frac{dQ}{dz} & \cdots & \frac{dQ}{dt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dS}{dx} & \frac{dS}{dy} & \frac{dS}{dz} & \cdots & \frac{dS}{dt} \end{vmatrix} = 0,$$

d'où résultent immédiatement des équations finies de la nature de (22) en supposant, pour fixer les idées, que le mineur de ce déterminant, où sont intéressées les $k(\leqq h)$ fonctions

(29) $$V, \quad \ldots, \quad S$$

[les dernières du groupe total (27)] et les k variables

(30) $$v, \quad \ldots, \quad t$$

(les dernières de la suite $x, y, z, \ldots, t$), soit $\neq 0$, mais que tous les mineurs d'ordres plus élevés soient nuls identiquement (314*).

Finalement, la résolution, par rapport à $\frac{\partial \omega}{\partial V}, \ldots, \frac{\partial \omega}{\partial S}$ des k dernières équations (26), (28), est possible et donne, en particulier,

(31) $$\frac{\partial \omega}{\partial V} = \mathfrak{V} \frac{\partial \omega}{\partial U} + \mathfrak{Q} \frac{\partial \omega}{\partial Q} + \ldots + \mathfrak{T} \frac{\partial \omega}{\partial T},$$

où U, Q, ..., T sont les $p = h - k$ fonctions (23), c'est-à-dire celles de la suite U, Q, ..., T, V, ..., S qui n'appartiennent pas au groupe (29), où $\mathfrak{V}, \mathfrak{Q}, \ldots, \mathfrak{T}$ représentent des fonctions déterminées de $x, y, z, \ldots, t$. Si, d'autre part, on différentie la première équation (22) par rapport aux variables (30), on trouve les k équations

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega_1}{\partial U} \frac{dU}{dv} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial Q} \frac{dQ}{dv} + \ldots + \frac{\partial \Omega_1}{\partial S} \frac{dS}{dv} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial U} \frac{dU}{dt} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial Q} \frac{dQ}{dt} + \ldots + \frac{\partial \Omega_1}{\partial S} \frac{dS}{dt} = 0, \end{cases}$$

e différant des k dernières équations (26), (28) que par la substi-

tution de Ω_1 à ϖ. On en tire donc pareillement

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial V} = \mathfrak{V}\,\frac{\partial\Omega_1}{\partial U} + \mathfrak{Q}\,\frac{\partial\Omega_1}{\partial Q} + \ldots + \mathfrak{T}\,\frac{\partial\Omega_1}{\partial T}, \tag{32}$$

et l'on obtient de même

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\Omega_2}{\partial V} = \mathfrak{V}\,\dfrac{\partial\Omega_2}{\partial U} + \mathfrak{Q}\,\dfrac{\partial\Omega_2}{\partial Q} + \ldots + \mathfrak{T}\,\dfrac{\partial\Omega_2}{\partial T}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial\Omega_p}{\partial V} = \mathfrak{V}\,\dfrac{\partial\Omega_p}{\partial U} + \mathfrak{Q}\,\dfrac{\partial\Omega_p}{\partial Q} + \ldots + \mathfrak{T}\,\dfrac{\partial\Omega_p}{\partial T}. \end{array}\right. \tag{33}$$

Or les formules (31), (32), (33) assurent évidemment la nullité identique du déterminant ayant pour éléments ceux des $p+1$ premières colonnes du Tableau (25), c'est-à-dire l'existence à la première équation du groupe (24) dont les autres sont satisfaites pour des raisons semblables.

II. *Inversement, si les notations* (27) *représentent maintenant des fonctions de x, y, z, …, t qui vérifient les équations* (22), (24), *le transport de ces fonctions dans l'expression* (17) *donne la fonction*

$$u = \varpi(x, y, z, \ldots, t;\ U, Q, \ldots, S) \tag{34}$$

qui est certainement une intégrale de l'équation (16).

Comme, en vertu des équations (24), les déterminants d'ordre $p+1$ du Tableau (25) sont tous nuls sans qu'il en soit ainsi (nous l'avons expressément supposé) pour celui d'ordre p dont les éléments sont placés à la fois dans les p dernières lignes et les p premières colonnes, on a les identités

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\varpi}{dU} = \lambda_1\,\dfrac{d\Omega_1}{dU} + \ldots + \lambda_p\,\dfrac{d\Omega_p}{dU}, \\ \dfrac{d\varpi}{dQ} = \lambda_1\,\dfrac{d\Omega_1}{dQ} + \ldots + \lambda_p\,\dfrac{d\Omega_p}{dQ}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d\varpi}{dS} = \lambda_1\,\dfrac{d\Omega_1}{dS} + \ldots + \lambda_p\,\dfrac{d\Omega_p}{dS}, \end{array}\right. \tag{35}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ représentent certains multiplicateurs, fonctions de x, y, z, …, t.

La différentiation par rapport à y des équations (22) donnant

ces autres relations

$$\frac{d\Omega_1}{dU}\frac{dU}{dy}+\frac{d\Omega_1}{dQ}\frac{dQ}{dy}+\ldots+\frac{d\Omega_1}{dS}\frac{dS}{dy}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d\Omega_p}{dU}\frac{dU}{dy}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{d\Omega_p}{dS}\frac{dS}{dy}=0,$$

les précédentes (35) conduisent à

$$\frac{d\varphi}{dU}\frac{dU}{dy}+\frac{d\varphi}{dQ}\frac{dQ}{dy}+\ldots+\frac{d\varphi}{dS}\frac{dS}{dy}=0,$$

moyennant quoi la même différentiation de la formule (34) laisse

$$(36)\qquad \frac{du}{dy}=\varphi'_y(x, y, z, \ldots, t, U, Q, \ldots, S).$$

On trouve de la même manière

$$(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dz}=\varphi'_z(x, y, z, \ldots, t, U, Q, \ldots, S), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{du}{dt}=\varphi'_t(x, y, z, \ldots, t, U, Q, \ldots, S), \end{cases}$$

et aussi

$$(38)\qquad \frac{du}{dx}=\varphi'_x(x, y, z, \ldots, t, U, Q, \ldots, S).$$

La fonction (34) satisfait donc à l'équation aux dérivées partielles (16), puisque (78) celle-ci est précisément régénérée par l'élimination de U, Q, ..., S entre les équations (34), (36), (37) et (38).

80. En appelant $U_0, Q_0, \ldots, S_0$ les fonctions de $y, z, \ldots, t$ seulement, auxquelles se réduisent, pour $x=x_0$, les fonctions de $x, y, z, \ldots, t$ à substituer à U, Q, ..., S dans l'expression (34) pour obtenir l'intégrale particulière de l'équation (16) qui a pour détermination initiale une fonction donnée $\varpi(y, z, \ldots, t)$ de ses $h-1$ variables paramétriques, on a évidemment les h relations

$$(39)\qquad \begin{cases} \varpi(y, z, \ldots, t)=\varphi(x_0, y, z, \ldots, t, U_0, Q_0, \ldots, S_0), \\ \varpi'_y(y, z, \ldots, t)=\varphi'_y(x_0, y, z, \ldots, t, U_0, Q_0, \ldots, S_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varpi'_t(y, z, \ldots, t)=\varphi'_t(x_0, y, z, \ldots, t, U_0, Q_0, \ldots, S_0), \end{cases}$$

dans lesquelles la substitution à u de l'intégrale considérée et l'hypothèse numérique $x = x_0$ changent immédiatement les équations (34), (36), (37). L'élimination de toutes les variables paramétriques y, z, ..., t entre les équations (39) est donc toujours possible et conduira, entre U_0, Q_0, ..., S_0 seulement, à un certain nombre d'identités

$$\Theta_1(U_0, Q_0, \ldots, S_0) = 0, \qquad \Theta_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Theta_{p_0} = 0$$

dont les déterminants différentiels des premiers membres, pris par rapport à quelque combinaison de p_0 des quantités U_0, Q_0, ..., S_0 considérées un instant comme autant de variables indépendantes, ne sont pas tous identiquement nuls. Cela posé, il est à peu près évident que, pour former les équations (22) qui conduisent à l'intégrale particulière considérée, il faut prendre $p = p_0$, et les composantes Ω_1, Ω_2, ... de leurs premiers nombres, identiques aux fonctions Θ_1, Θ_2, ...

81. Le théorème du n° 79 permet évidemment de dire que *moyennant l'adjonction des équations* (22) *et* (24), *les premières arbitraires en nature et en nombre sauf la condition d'être distinctes* (*et de former avec les dernières un système résoluble par rapport à* U, Q, ..., S), *la formule* (34) *fournit l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles considérée* (16). On a vu effectivement qu'elle peut donner toutes les intégrales particulières (I), et qu'elle ne donne que de pareilles fonctions (II).

La notion des intégrales complètes et les propositions s'y rattachant s'étendraient facilement au cas d'équations différentielles partielles formant un système immédiat, passif, à une seule fonction inconnue toujours, mais à *plusieurs* variables principales. La même extension à un système immédiat quelconque paraîtrait très intéressante si elle était possible.



CHAPITRE V.

QUESTIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM.

Cas d'une simple fonction.

82. En thèse générale, une quantité réelle, dont la valeur dépend de circonstances variables de nature quelconque, est dite *maximum* pour une certaine combinaison particulière des circonstances en question, quand des variations attribuées arbitrairement à ces dernières au-dessous de certaines limites à partir de ce qu'elles sont dans la combinaison considérée, n'impriment jamais à cette quantité que des accroissements négatifs. La définition d'un *minimum* est la même, à cela près qu'au lieu du signe $-$, c'est le signe $+$ que doivent présenter constamment les accroissements dont il s'agit.

83. D'après cela et en particulier, une fonction donnée

$$f(x, y, \ldots),$$

restant réelle en même temps que les variables, sera maximum ou minimum en $x=a$, $y=b$, ... quand son accroissement $f(a+h, b+k, \ldots)-f(a, b, \ldots)$ conservera le signe $-$ dans le premier cas, le signe $+$ dans le second pour toute combinaison de valeurs (réelles) des accroissements h, k, ... numériquement inférieures à H, K, ... respectivement, quantités positives invariables de grandeurs données quelconques.

84. Quand la fonction $f(x, y, \ldots)$ n'est pas olotrope en a, b, ..., aucune règle générale ne permet d'apercevoir si ces valeurs des variables la rendent maximum, minimum, ou non; on se trouve dans l'inconnu propre aux phases singulières que nous avons signalé si souvent, et c'est exclusivement dans les propriétés

spéciales de cette fonction qu'il faut chercher les éléments de la discussion.

Mais quand elle y est olotrope, plusieurs conditions nécessaires à l'existence d'un maximum ou d'un minimum en a, b, ... peuvent être formulées.

La formule de Taylor (168*) finit alors par donner

$$(1)\quad \begin{cases} f(a+h, b+k, \ldots) - f(a, b, \ldots) \\ \quad = \dfrac{1}{1.2\ldots M} D^{M}_{a,b,\ldots}(h, k, \ldots) + \dfrac{1}{1.2\ldots(M+1)} D^{M+1}_{a,b,\ldots}(h, k, \ldots) + \ldots, \end{cases}$$

où $D^{m}_{a,b,\ldots}(h, k, \ldots)$ représente généralement la différentielle totale d'ordre m de $f(x, y, \ldots)$, polynôme entier et homogène de degré m par rapport aux accroissements h, k, ... dont les coefficients sont, à des facteurs numériques près, les valeurs, pour $x = a$, $y = b$, ..., des diverses dérivées de $f(x, y, \ldots)$ d'ordre total m, et où M est l'ordre de la première différentielle *effective*, c'est-à-dire dont tous les coefficients ne se réduisent pas à zéro et qui, par suite, ne s'évanouit pas quels que soient h, k, ... Cela posé :

I. *Il faut d'abord que le polynôme homogène* $D^{M}_{a,b,\ldots}(h, k, \ldots)$ *ne puisse prendre (pour des valeurs réelles de h, k, ...) que des valeurs nulle ou négatives dans le cas du maximum, que des valeurs nulle ou positives dans celui du minimum.*

Car en appelant h, k, ... quelque système de valeurs particulières attribuées à h, k, ..., puis ε une quantité positive infiniment petite et prenant $h = \mathrm{h}\varepsilon$, $k = \mathrm{k}\varepsilon$, ..., la formule (1) devient, à cause de l'homogénéité de chaque différentielle,

$$(2)\quad \begin{cases} f(a+h, b+k, \ldots) - f(a, b, \ldots) \\ \quad = \dfrac{D^{(M)}_{a,b,\ldots}(\mathrm{h}, \mathrm{k}, \ldots)}{1.2\ldots M}\varepsilon^{M} + \dfrac{D^{(M+1)}(\mathrm{h}, \mathrm{k}, \ldots)}{1.2\ldots(M+1)}\varepsilon^{M+1} + \ldots, \end{cases}$$

série entière en ε, dont la somme a pour signe final celui de $D^{M}_{a,b,\ldots}(\mathrm{h}, \mathrm{k}, \ldots)$ (18**). Si donc cette différentielle pouvait prendre des valeurs positives, il en serait de même pour certains accroissements de $f(x, y, \ldots)$ et il n'y aurait pas maximum ; si elle pouvait devenir négative, le minimum serait impossible pour une raison semblable.

II. *Pour le maximum ou le minimum indistinctement, il faut par suite que l'ordre* M *de cette première différentielle effective soit un nombre pair.*

Car si M était impair, et en supposant comme il est permis de le faire $D^{M}_{a,b,\ldots}(\mathrm{h}, \mathrm{k}, \ldots) \neq 0$, cette quantité et

$$D^{M}_{a,b,\ldots}(-\mathrm{h}, -\mathrm{k}, \ldots) = (-1)^{M} D^{M}_{a,b,\ldots}(\mathrm{h}, \mathrm{k}, \ldots)$$

seraient de signes contraires (I).

III. *Si quelque système* (h, k, ...) *de valeurs réelles de h, k, ... non toutes* $= 0$ *annule* $D^{M}_{a,b,\ldots}(h, k, \ldots)$, *il faut ensuite que, parmi les différentielles subséquentes, s'en trouve une au moins qui ne s'annule pas pour* $h = \mathrm{h}$, $k = \mathrm{k}$, ... *et que la première de celles jouissant de cette propriété prenne une valeur négative dans le cas du maximum, positive dans celui du minimum.*

Car si toutes les différentielles subséquentes s'annulaient en même temps, il résulterait de la formule (2) que, pour $h = \mathrm{h}\varepsilon$, $k = \mathrm{k}\varepsilon$, ..., $f(x, y, \ldots)$ prendrait un accroissement nul et qu'il n'y aurait ainsi ni maximum, ni minimum.

Si la première de ces différentielles subséquentes qui ne s'annule pas, d'ordre N pour fixer les idées, avait une valeur positive, la même formule, se réduisant à

$$f(a+h, b+k, \ldots) - f(a, b, \ldots) = \frac{D^{N}_{a,b,\ldots}(\mathrm{h}, \mathrm{k}, \ldots)}{1.2\ldots N}\varepsilon^{N} + \ldots,$$

montrerait que certains accroissements de $f(x, y, \ldots)$ conserveraient le signe +, d'où impossibilité d'un maximum ; si elle prenait une valeur négative, on verrait de même qu'un minimum est impossible.

IV. *Pour le maximum ou le minimum indistinctement, il faut, par suite, que cet ordre* N *soit encore un nombre pair.*

Car pour $h = -\mathrm{h}$, $k = -\mathrm{k}$, ..., $D^{M}_{a,b,\ldots}(h, k, \ldots)$ s'annule aussi, et $D^{N}_{a,b,\ldots}(h, k, \ldots)$ serait toujours la différentielle ultérieure de moindre ordre qui ne s'annulerait pas. Si donc N était impair,

$$D^{N}_{a,b,\ldots}(-\mathrm{h}, -\mathrm{k}, \ldots) = (-1)^{N} D^{N}_{a,b,\ldots}(\mathrm{h}, \mathrm{k}, \ldots)$$

serait de signe contraire à cette dernière quantité, et l'on ne pourrait avoir ni un maximum, ni un minimum (III).

85. *Pour qu'il y ait maximum, il suffit que tout système de valeurs (réelles) de h, k, ..., non toutes $= 0$ rende négative la première différentielle effective*

$$(3) \qquad D^{(M)}_{a,b,\ldots}(h, k, \ldots) = Ph^M + Qh^{M-1}k + Rk^M + \ldots,$$

supposée d'ordre pair (84, II); *pour qu'il y ait minimum, il suffit que dans les mêmes circonstances cette différentielle soit constamment positive.*

Pour que la forme algébrique (3) de degré pair, aux coefficients réels P, Q, R, ..., aux variables h, k, ..., soit *négative*, c'est-à-dire ne prenne que des valeurs négatives par l'attribution à h, k, ... de valeurs réelles quelconques mais non toutes $= 0$, il faut et il suffit, d'après les indications de la théorie générale, qu'il existe entre ses coefficients certaines inégalités

$$(4) \qquad \Omega_1(P, Q, R, \ldots) > 0, \qquad \Omega_2(P, Q, R, \ldots) > 0, \qquad \ldots,$$

dont les premiers membres sont des polynômes entiers en P, Q, R, ... Et, si ces inégalités sont satisfaites, on peut évidemment assigner des quantités positives ϖ, χ, ρ, ... assez petites pour avoir encore

$$(5) \qquad \begin{cases} \Omega_1(P + p, Q + q, R + r, \ldots) > 0, \\ \Omega_2(P + p, Q + q, R + r, \ldots) > 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

tant que p, q, r, ... conservent des valeurs réelles donnant numériquement

$$(6) \qquad p < \varpi, \quad q < \chi, \quad r < \rho, \quad \ldots.$$

Cela posé on peut évidemment écrire

$$(7) \qquad \begin{cases} f(a+h, b+k, \ldots) - f(a, b, \ldots) \\ \quad = \dfrac{1}{1.2\ldots M}\left[(P+p)h^M + (Q+q)h^{M-1}k + (R+r)k^M + \ldots\right], \end{cases}$$

et, p, q, r, ... étant des séries entières en h, k, ... dont le nombre est limité, dont les premiers termes sont tous nuls, on peut assi-

gner des quantités positives H, K, ... assez petites pour avoir les inégalités (6) toutes les fois qu'on a, numériquement aussi,

$$(8) \qquad h < H, \; k < K, \; \ldots.$$

Si donc la forme (3) est négative, les inégalités (4) ont lieu, et si ensuite on attribue à h, k, ... des valeurs limitées par les conditions (8) les inégalités (6) seront satisfaites aussi. Il en résulte que l'expression entre crochets dans la relation (7), sorte de forme de degré M à coefficients variables, prendra forcément des valeurs toujours négatives et par suite qu'il y a maximum.

Quand la forme (3) est *positive*, un raisonnement identique montre qu'il y a minimum.

86. L'étude complète des conditions dont la nécessité a été constatée au n° 84 semble être assez difficile, parce qu'elle comporte la discussion numérique de polynômes de tous degrés, dépendant en outre de variables en nombre quelconque. Ces conditions paraissent suffisantes sans que nous puissions toutefois l'affirmer.

Quant à celle qu'au n° 85 nous avons reconnue suffisante, les besoins courants de la pratique n'en exigent pas davantage. Mais elle n'est pas nécessaire; par exemple, la fonction

$$x^2 + y^4 + z^6$$

est évidemment minimum en $x = y = z = 0$, et cependant sa première différentielle totale effective, qui est du second ordre, savoir

$$2.1\, h^2 + 4.3\, y^2 k^2 + 6.5\, z^4 l^2,$$

n'y devient pas une forme *positive;* car elle s'y réduit à

$$2h^2,$$

qui, pour $h = 0$, $k \neq 0$, $l \neq 0$, prend une valeur nulle, partant non négative.

87. Voici les règles particulières les plus utiles qui découlent des considérations précédentes :

I. *Pour qu'une fonction (olotrope) d'une seule variable $f(x)$*

soit maximum ou minimum en $x = a$, il faut et il suffit que $f^{M}(a)$, première des dérivées successives $f'(a)$, $f''(a)$, ... qui ne s'annule pas, soit d'ordre pair, et qu'en outre elle soit négative dans le premier cas, positive dans le second.

Car $f^{(M)}(a)h^{M}$, première différentielle effective, doit être d'ordre pair (84, II); et s'il en est ainsi, elle constitue une forme de degré M en h seulement, qui est évidemment négative ou positive selon qu'on a $f^{(M)}(a) \lesseqgtr 0$ (85).

II. *Pour qu'une fonction (olotrope) de deux variables $f(x, y)$ soit maximum ou minimum en $x = a$, $y = b$, il faut qu'on ait*

(9) $$f^{(1,0)}(a, b) = f^{(0,1)}(a, b) = 0.$$

Il suffit ensuite qu'en posant

$$P = f^{(2,0)}(a, b), \qquad Q = f^{(1,1)}(a, b), \qquad R = f^{(0,2)}(a, b),$$

on ait d'abord

(10) $$PR - Q^2 > 0,$$

puis

(11) $$P < 0, \qquad R < 0$$

pour le maximum, ou bien

(12) $$P > 0, \qquad R > 0$$

pour le minimum.

Si les conditions (9) n'étaient pas remplies, la première différentielle effective serait d'ordre 1, partant impair, et il n'y aurait ni maximum ni minimum (84, II).

Quand elles sont remplies l'inégalité (10), s'opposant à ce qu'on ait à la fois $P = Q = R = 0$, fixe à 2 l'ordre de la première différentielle effective. D'après les Éléments enfin, cette différentielle seconde est une forme négative si l'on a à la fois (10) et (11), positive au contraire si l'on a (10) et (12) (85).

III. La règle posée dans l'alinéa précédent (II) s'étend facilement à une fonction de variables en nombre quelconque, parce qu'on sait discuter toutes les formes quadratiques à coefficients

réels (par exemple en les décomposant en carrés de formes linéaires). Mais nous nous bornerons à cette indication, tant il est rare que l'on ait à utiliser ces considérations.

88. Une fonction quelconque $f(x, y, \ldots)$ étant donnée, il est facile à présent d'assigner les valeurs particulières des variables qui peuvent la rendre maximum ou minimum.

I. Les valeurs pouvant donner lieu à un maximum ou minimum *singulier*, se trouvent parmi celles pour lesquelles $f(x, y, \ldots)$ cesse d'être olotrope. La nature spéciale de cette fonction les fait connaître, et ses propriétés permettent ensuite de les discuter.

II. Pour un maximum ou minimum *ordinaire*, il faut avant tout que la première différentielle effective soit d'ordre pair (84, II), par suite que la différentielle totale de moindre ordre 1 (nombre impair) ne soit pas effective, c'est-à-dire que toutes les dérivées premières de $f(x, y, \ldots)$ s'évanouissent numériquement. Les valeurs correspondantes de $x, y, \ldots$ se trouveront ainsi parmi les solutions réelles du système complet d'équations finies simultanées

$$\left\{\begin{array}{l} f^{1,0,0,\ldots}(x, y, \ldots) = 0, \\ f^{0,1,0,\ldots}(x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

La résolution de ces équations les fournira donc, et il ne restera plus ensuite qu'à discuter séparément chaque système de valeurs de $x, y, \ldots$ ainsi obtenu. La discussion est assez souvent épargnée par des circonstances particulières indiquant *a priori* s'il y a maximum ou minimum.

89. Comme application très simple, nous chercherons les valeurs de x rendant maximum ou minimum la fonction

$$f(x) = (x - a)^{\frac{2}{3}} (x - b)^{3},$$

où $a < b$ sont des constantes positives, et où il s'agit naturellement de la détermination réelle unique du radical $(x - a)^{\frac{2}{3}}$.

I. La fonction considérée ne cessant d'être olotrope que pour $x = a$, seule valeur annulant la quantité soumise au radical (125**),

un maximum ou minimum singulier ne peut exister ailleurs qu'en $x=a$. Comme $f(a)=0$, que $(x-a)^{\frac{2}{3}}$ est une quantité positive pour toute valeur de $x \neq a$, et que, à cause de $a-b<0$, d'où $(a-b)^3<0$, $(x-b)^3$ est une quantité négative pour toute valeur de x infiniment voisine de a, il y a effectivement maximum.

II. Les valeurs de x pouvant faire naître un maximum ou minimum ordinaire sont les racines réelles de l'équation

$$f'(x)=0 \qquad (88,\ \text{II}),$$

où

$$f'(x)=\frac{11}{3}(x-a)^{-\frac{1}{3}}\left[(x-b)^2\left(x-\frac{9a+2b}{11}\right)\right],$$

donnant par suite

$$x=\begin{cases}\text{soit } b,\\ \text{soit } b_1=\dfrac{9a+2b}{11}.\end{cases}$$

La première racine b étant un zéro double pour $f'(x)$ annule en même temps $Df'(x)=f''(x)$, mais non $D^2f'(x)=f'''(x)$ (3**); elle ne rend donc $f(x)$ ni maximum ni minimum (87, I).

L'autre racine b_1 étant simple pour $f'(x)$ donne à $Df'(x)=f''(x)$ la même valeur qu'à

$$\frac{f'(x)}{x-b_1}=\frac{11}{3}(x-a)^{-\frac{1}{3}}(x-b)^2,$$

et par suite évidemment le même signe qu'à $(x-a)$, c'est-à-dire celui de $(b_1-a)=\frac{2}{11}(b-a)>0$; il y a donc minimum (*loc. cit.*).

90. Le fond des choses reste naturellement le même, mais le mécanisme du calcul se modifie un peu, quand il s'agit de rendre maximum ou minimum une fonction implicite, par exemple la racine u de l'équation

$$(13) \qquad F(x,u)=0,$$

où nous supposerons olotrope la composante F.

Comme alors u ne peut cesser d'être olotrope que pour les valeurs correspondantes de x, u annulant $F^{(0,1)}(x,u)$ (307*), les valeurs de x pouvant donner lieu à un maximum ou minimum singulier devront être cherchées dans les couples de solutions des

équations numériques simultanées (13) et

$$F^{(0,1)}(x, u) = 0.$$

Comme ensuite on a

$$\frac{du}{dx} = -\frac{F^{(1,0)}(x, u)}{F^{(0,1)}(x, u)},$$

les valeurs de x annulant $\frac{du}{dx}$ et les valeurs correspondantes de u annuleront $F^{(1,0)}(x, u)$ certainement aussi; celles pouvant faire naître un maximum ou minimum ordinaire devront donc être cherchées dans les couples de solutions des équations simultanées (13) et

$$F^{(1,0)}(x, u) = 0.$$

Dans les deux cas, bien entendu, il faut discuter après coup chaque valeur de x ainsi obtenue. Quand $F^{(0,1)}(x, u)$ s'évanouit, on a recours aux développements spéciaux des diverses déterminations de u (143** *et suiv.*).

Supposons, comme application, que l'équation (13) soit de la forme

(14) $$Ax^2 + 2Bx + C = 0,$$

où A, B, C sont des fonctions quelconques de u. Pour tout maximum ou minimum ordinaire, on aura

(15) $$\tfrac{1}{2}F^{(1,0)}(x, u) = Ax + B = 0,$$

d'où, en retranchant de (14) cette équation multipliée par x,

(16) $$Bx + C = 0,$$

puis en éliminant x

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0,$$

équation numérique en u seulement, admettant pour racines les valeurs de cette fonction quand elle est maximum ou minimum. L'équation (15) [ou (16)] fournit ensuite les valeurs correspondantes de x

$$x = -\frac{B}{A}\left(= -\frac{C}{B}\right)$$

qu'il reste naturellement à discuter.

On retrouve ainsi la règle élémentaire propre aux maximums et minimums calculables par les équations du deuxième degré.

91. On dit *absolu* un maximum ou minimum du genre de ceux dont nous venons de parler, c'est-à-dire d'une fonction de variables toutes indépendantes les unes des autres. Par opposition, on nomme *relatifs* ceux par lesquels peut passer une fonction

$$f(x, y, \ldots, u, v, \ldots) \tag{17}$$

de $h+g$ variables $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, quand les valeurs de celles-ci sont assujetties à vérifier g équations finies données

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_g(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0. \end{array}\right. \tag{18}$$

Leur recherche se ramène à celle des maximums ou minimums absolus, par la substitution à $u, v, \ldots$ dans $f(x, y, \ldots, u, v, \ldots)$ de leurs expressions en $x, y, \ldots$ tirées des équations (18); car cette fonction se change ainsi en une fonction composée de $x, y, \ldots$ seulement devenues maintenant toutes indépendantes. Mais, si l'on se borne aux maximums ou minimums ordinaires, et si l'on suppose remplies toutes les conditions sous lesquelles subsiste la théorie générale des fonctions implicites (307*), on peut employer aussi une méthode spéciale dont voici l'esquisse.

En supposant que $u, v, \ldots$ représentent maintenant les fonctions implicites de $x, y, \ldots$ que fournit la résolution des équations (18), il faut d'abord égaler à zéro la dérivée première par rapport à x de la fonction composée (17) (88, II), ce qui donne

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{du}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dx} + \ldots = 0. \tag{19}$$

Mais la différentiation semblable des équations (18) donnant aussi

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{df_1}{dx} + \dfrac{df_1}{du}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{df_1}{dv}\dfrac{dv}{dx} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{df_g}{dx} + \dfrac{df_g}{du}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{df_g}{dv}\dfrac{dv}{dx} + \ldots = 0, \end{array}\right. \tag{20}$$

l'élimination des g dérivées $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \cdots$ entre les $g+1$ équations linéaires (19), (20) conduira à l'équation

$$(21) \qquad \Delta_{x,u,v,\ldots}(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0$$

ayant pour premier membre le déterminant différentiel, pris par rapport à x et à u, v, ..., du groupe formé par l'association de la fonction proposée (17) avec les premiers membres des équations (18); et cette équation est satisfaite par tout système des valeurs correspondantes de $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ donnant lieu à un maximum ou à un minimum. Des différentiations par rapport à y, z, ... donneront de même

$$(22) \qquad \begin{cases} \Delta_{y,u,v,\ldots}(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0, \\ \Delta_{z,u,v,\ldots}(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Pour obtenir les seuls groupes de valeurs des $h+g$ variables pouvant correspondre à un maximum ou à un minimum il suffit donc de résoudre le système complet formé par l'adjonction aux g équations (18) des h équations (21), (22). Une discussion de chaque groupe ainsi calculé indique ensuite ceux d'entre eux qui donnent réellement lieu à un maximum ou à un minimum. En pratique elle peut être fort pénible, mais en théorie elle est assez facile pour que nous puissions épargner au lecteur les détails arides et fastidieux de son exposition générale.

92. Représentons par $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_g$ les mineurs complémentaires aux éléments (quelconques) $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_g$ composant la première colonne du déterminant d'ordre $g+1$

$$\begin{vmatrix} \Lambda & \frac{df}{du} & \frac{df}{dv} & \cdots \\ \Lambda_1 & \frac{df_1}{du} & \frac{df_1}{dv} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Lambda_g & \frac{df_g}{du} & \frac{df_g}{dv} & \cdots \end{vmatrix},$$

et affectons de l'accent o les valeurs de toutes les quantités de la

question correspondant à un maximum ou minimum relatif. Les g identités

$$\lambda \frac{df}{du} + \lambda_1 \frac{df_1}{du} + \ldots + \lambda_g \frac{df_g}{du} = 0,$$
$$\lambda \frac{df}{dv} + \lambda_1 \frac{df_1}{dv} + \ldots + \lambda_g \frac{df_g}{dv} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

donnent en particulier

$$(23)\quad \begin{cases} \lambda^{(0)}\left(\frac{df}{du}\right)^{(0)} + \lambda_1^{(0)}\left(\frac{df_1}{du}\right)^{(0)} + \ldots + \lambda_g^{(0)}\left(\frac{df_g}{du}\right)^{(0)} = 0, \\ \lambda^{(0)}\left(\frac{df}{dv}\right)^{(0)} + \lambda_1^{(0)}\left(\frac{df_1}{dv}\right)^{(0)} + \ldots + \lambda_g^{(0)}\left(\frac{df_g}{dv}\right)^{(0)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et montrent, par suite, qu'en considérant $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, comme $h+g$ variables toutes indépendantes, les dérivées, par rapport à $u, v, \ldots$ seulement, de la fonction composée

$$(24)\qquad \lambda^{(0)} f + \lambda_1^{(0)} f_1 + \ldots + \lambda_g^{(0)} f_g$$

s'évanouissent toutes pour $x = x^{(0)}$, $y = y^{(0)}$, $\ldots$, $u = u^{(0)}$, $v = v^{(0)}$, $\ldots$.

Mais si, après avoir réalisé cette hypothèse numérique dans les équations (19), (20), on ajoute membre à membre les premières multipliées par $\lambda^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_g^{(0)}$, et, si l'on tient compte des égalités (23), on trouve que la valeur correspondante de la dérivée partielle par rapport à x de cette fonction composée s'évanouit aussi; et de même pour ses dérivées par rapport à $y, z, \ldots$.

Il en résulte (88, II) que *la fonction* (24) *des $h+g$ variables $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, laissées toutes indépendantes, passe en général par un maximum ou minimum absolu, quand la fonction* (17) *des mêmes variables liées alors par les équations* (18), *passe par un maximum ou minimum relatif.*

On retrouverait évidemment les équations (21), (22) du maximum ou minimum relatif de la fonction (17), sous les conditions (18), en considérant $\lambda^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_g^{(0)}$ comme des constantes indéterminées, et les éliminant entre les équations du maximum ou minimum absolu de la fonction composée (24) aux $h+g$ variables toutes indépendantes $x, y, \ldots, u, v, \ldots$.

93. Voici une dernière observation de quelque intérêt. Nous avons vu que les équations additionnelles (21) et (22) du maximum ou minimum relatif se forment en égalant à zéro les déterminants différentiels des $g+1$ fonctions $f, f_1, \ldots, f_g$, pris par rapport à tous les groupes de variables comprenant $u, v, \ldots$ et en outre soit x, soit $y, \ldots$. Mais les déterminants différentiels des mêmes fonctions, pris par rapport à toutes les autres combinaisons $g+1$ à $g+1$ de toutes ces mêmes $h+g$ variables, s'évanouissent en même temps, ce qui résulte des principes de la théorie générale des déterminants et de cette condition sous-entendue que le déterminant différentiel de $f_1, f_2, \ldots, f_g$ par rapport à $u, v, \ldots$, (d'ordre g seulement), lui, ne s'évanouit pas. Par suite, on peut dire aussi bien que les équations du maximum ou minimum relatif se forment en égalant à zéro tous les déterminants différentiels *indistinctement* des $g+1$ fonctions

$$f, \quad f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_g.$$

Comme à présent rien ne les distingue les unes des autres, non plus que les variables $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, *les équations additionnelles restent les mêmes, quelle que soit la fonction à rendre maximum ou minimum relatif, pourvu que les équations de conditions soient celles égalant les g autres fonctions à zéro ou même à des constantes quelconques.*

C'est ainsi, par exemple, qu'en cherchant dans les Éléments le maximum du produit de deux quantités dont la somme est constante, ou bien le minimum de leur somme quand leur produit est constant, on trouve l'équation additionnelle en égalant dans les deux cas leur différence à zéro.

Cas d'une intégrale définie portant sur une fonction composée différentielle de fonctions simples indéterminées.

94. Les questions du genre de celles que nous avons maintenant à traiter présentent une variété et aussi une complication qui rendraient fort pénible l'exposition de leur solution générale. Nous préférons donc expliquer la méthode à suivre sur un type assez simple pour qu'on puisse bien le saisir, assez vaste cependant pour que ses extensions diverses soient faciles ensuite.

En appelant

(1) $$x_1 \quad \text{et} \quad u_1,\ u'_1,\ \ldots,\ u_1^{(k_1)},$$

(2) $$x_2 (\neq x_1) \quad \text{et} \quad u_2,\ u'_2,\ \ldots,\ u_2^{(k_2)}$$

des quantités réelles assujetties seulement à satisfaire à k équations finies données

(3) $$\left\{ \begin{array}{l} L_1(x_1,\ u_1,\ u'_1,\ \ldots,\ u_1^{(k_1)},\ x_2,\ u_2,\ u'_2,\ \ldots,\ u_2^{(k_2)}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_k(x_1,\ u_1,\ u'_1,\ \ldots,\ u_1^{(k_1)},\ x_2,\ u_2,\ u'_2,\ \ldots,\ u_2^{(k_2)}) = 0 \end{array} \right.$$

(ce qui comprend le cas où leurs valeurs numériques seraient données en tout ou en partie), puis $u(x)$ une fonction de x, réelle dans l'intervalle réel $[x_1 x_2]$ et indéterminée sous la seule condition qu'elle-même u et ses dérivées successives $u',\ u'' \ldots$ prennent jusqu'à l'ordre k_1, pour $x = x_1$, les valeurs formant la seconde partie du groupe (1), jusqu'à l'ordre k_2, pour $x = x_2$, les valeurs formant la seconde partie du groupe (2), puis enfin

(4) $$F(x,\ u,\ u',\ \ldots,\ u^{(m)})$$

une fonction composée différentielle de x, de u et des m premières dérivées de cette fonction, formée avec une composante réelle F donnée, *nous considérerons l'intégrale définie*

(5) $$S = \int_{x_1}^{x_2} F(x,\ u,\ u',\ \ldots,\ u^{(m)})\,dx$$

prise sur le segment réel $[x_1 x_2]$, *qui constitue une quantité réelle aussi* (25**) *dont l'indétermination est plus ou moins incomplète, et nous chercherons à la rendre maximum ou minimum* (82).

Les circonstances variables dont dépend la valeur générale de S, et qu'il s'agit de déterminer, sont ici les valeurs des quantités (1), (2), sous les conditions (3) dites *aux limites*, et la nature spécifique de la fonction $u(x)$, sous les conditions numériques qui lui sont ainsi imposées en $x = x_1$ et $x = x_2$.

95. Les raisonnements qui conduisent à la détermination dont

il s'agit ont pour point de départ les considérations générales suivantes :

I. En supposant remplies pour le système des équations (3) les conditions sous lesquelles subsiste la théorie générale des fonctions implicites (319* *et suiv.*), cela pour des valeurs des quantités (1), (2) suffisamment voisines de celles

(6) $$\mathrm{x}_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{u}_1, \quad \mathrm{u}'_1, \quad \ldots, \quad \mathrm{u}_1^{(k_1)},$$

(7) $$\mathrm{x}_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{u}_2, \quad \mathrm{u}'_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{u}_2^{(k_2)},$$

qui correspondent au maximum ou minimum cherché, *on peut assigner pour ces quantités* (1), (2) *autant de fonctions d'un même paramètre indéterminé a, qui satisfassent aux équations* (3) *quel que soit a, qui de plus en $a = \mathrm{a}$, valeur particulière de a choisie arbitrairement, soient olotropes et prennent les valeurs* (6), (7).

Pour cela, il suffit effectivement de tirer des k équations (3), k de ces quantités en fonctions olotropes des $[(k_1 + 2) + (k_2 + 2) - k]$ autres, puis de substituer partout, à ces dernières, des fonctions olotropes de a prenant pour $a = \mathrm{a}$, les valeurs qu'elles ont dans les suites (6), (7).

Tout ou partie des quantités (1), (2) pourraient être données numériquement, ou bien, ce qui est la même chose, les équations (3) à elles seules suffiraient à déterminer les valeurs de quelques-unes. Relativement au paramètre a, celles-ci se réduiraient alors à de simples constantes, mais elles ne cesseraient pas pour autant de pouvoir être considérées comme des fonctions de a.

II. *On peut également assigner quelque fonction $u(x, a)$ des deux variables x, a, qui soit olotrope pour toute combinaison des valeurs de x tombant dans l'intervalle $[x_1 x_2]$, avec celles de a suffisamment voisines de* a, *qui satisfasse, quelle que soit a, aux conditions imposées à $u(x)$ en $x = x_1$, $x = x_2$, et qui pour $a = \mathrm{a}$ se réduise à la détermination $\mathrm{u}(x)$ de cette fonction donnant lieu au maximum ou minimum.*

La formule générale de l'interpolation (62**) assure l'existence

d'un polynôme entier en x, de degré $k_1 + k_2 + 1$,

$$P(x, x_1, u_1, u'_1, \ldots, u_1^{(k_1)}, x_2, u_2, u'_2, \ldots, u_2^{(k_2)}),$$

se réduisant lui-même et ses dérivées successives, premièrement jusqu'à la $k_1^{\text{ième}}$ aux quantités formant la seconde partie du groupe (1) pour $x = x_1$, deuxièmement jusqu'à la $k_2^{\text{ième}}$ à celles formant la seconde partie du groupe (2) pour $x = x_2$; ensuite, et à cause de l'hypothèse $x_2 \neq x_1$, les coefficients de ce polynôme sont tous des fonctions olotropes des quantités (1), (2), ce que la formule mentionnée montre immédiatement; enfin le même polynôme se change évidemment en une fonction olotrope de x, a par la substitution, aux mêmes quantités (1), (2), de leurs expressions en a dont nous parlions tout à l'heure (I).

Comme on a évidemment

$$\begin{array}{llll} \mathrm{u}(\mathrm{x}_1) = \mathrm{u}_1, & \mathrm{u}'(\mathrm{x}_1) = \mathrm{u}'_1, & \ldots, & \mathrm{u}^{(k_1)}(\mathrm{x}_1) = \mathrm{u}_1^{(k_1)}, \\ \mathrm{u}(\mathrm{x}_2) = \mathrm{u}_2, & \mathrm{u}'(\mathrm{x}_2) = \mathrm{u}'_2, & \ldots, & \mathrm{u}^{(k_2)}(\mathrm{x}_2) = \mathrm{u}_2^{(k_2)}, \end{array}$$

il suffira donc de prendre

$$(8) \left\{ \begin{aligned} u(x, a) = \mathrm{u}(x) &- P[x, x_1, \mathrm{u}(x_1), \ldots, \mathrm{u}^{(k_1)}(x_1), x_2, \mathrm{u}(x_2), \ldots, \mathrm{u}^{(k_2)}(x_2)] \\ &+ P(x, x_1, u_1, \ldots, u_1^{(k_1)}, x_2, u_2, \ldots, u_2^{(k_2)}) \\ &+ (a - \mathrm{a})(x - x_1)^{k_1+1}(x - x_2)^{k_2+1}\,\omega(x, a), \end{aligned} \right.$$

$\omega(x, a)$ désignant une fonction olotrope de x, a entièrement arbitraire. Effectivement cette expression est une fonction de x, a, évidemment olotrope dans les circonstances considérées. En $x = x_1$ ou $= x_2$, elle satisfait, quel que soit a, aux conditions imposées à la fonction $u(x)$; car pour $x = x_1$ par exemple, $i (< k_1 + 1)$ différentiations par rapport à x exécutées sur ses quatre termes donnent

$$\mathrm{u}^{(i)}(x_1) - \mathrm{u}^{(i)}(x_1) + u_1^{(i)} - 0 = u_1^{(i)}.$$

Elle se réduit enfin à $\mathrm{u}(x)$ pour $a = \mathrm{a}$, parce que son dernier terme s'évanouit identiquement et qu'il vient en même temps

$$x_1 = \mathrm{x}_1, \quad u_1 = \mathrm{u}_1 = \mathrm{u}(\mathrm{x}_1), \quad u'_1 = \mathrm{u}'_1 = \mathrm{u}'(\mathrm{x}_1), \quad \ldots,$$
$$u_1^{(k_1)} = \mathrm{u}_1^{(k_1)} = \mathrm{u}^{(k_1)}(\mathrm{x}_1),$$
$$x_2 = \mathrm{x}_2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

cause immédiate de destruction mutuelle pour son second et son troisième terme.

III. *Moyennant un choix convenable de $\omega(x, a)$ et de la valeur particulière à attribuer ensuite à a, on peut identifier la fonction $u(x, a)$ fournie par la formule* (8) *avec toute fonction olotrope de x qui remplirait les conditions aux limites exprimées par les équations* (3) *et dont l'excès sur* $\mathrm{u}(x)$ *resterait, quelle que soit x dans l'intervalle* $[x_1, x_2]$, *numériquement inférieur à une quantité positive suffisamment petite.*

La considération invoquée au commencement de l'alinéa V ci-dessous nous permet de supprimer la démonstration.

IV. En supposant maintenant olotrope la composante F qui figure dans l'intégrale considérée (5), la substitution à x_1, x_2, $u(x)$ d'une combinaison particulière quelconque des fonctions correspondantes de a définies dans l'alinéa I, de x, a définie dans l'alinéa II, change évidemment cette intégrale, et cela sans violer les conditions (3), en une fonction olotrope déterminée de a, savoir $S(a)$, qui est maximum ou minimum en a, et dont par suite (87, I) la dérivée première $S'(a)$ s'évanouit par $a = \mathrm{a}$. Ainsi donc *la détermination de u en fonction de x, et les valeurs numériques des limites x_1, x_2, rendant l'intégrale* (5) *maximum ou minimum, ne doivent être cherchées que parmi celles où l'introduction du paramètre a, faite de toutes les manières possibles par les moyens indiqués ci-dessus, annule toujours* $S'(\mathrm{a})$.

Comme d'autre part, ainsi que nous le constaterons bientôt, *cette dernière condition, à elle seule, procure dans tous les cas la détermination complète de $u(x)$, x_1, x_2, il suffit de la faire intervenir, pour assigner avec précision les seules circonstances pouvant faire naître un maximum ou minimum.* C'est ce que nous ferons dans les numéros suivants.

V. Il resterait ensuite à s'assurer qu'on a bien obtenu ainsi, soit un maximum, soit un minimum, et pour cela à étudier les dérivées ultérieures de $S(a)$; mais, dans les questions courantes, les données le disent *a priori* et rendent superflue cette pénible discussion que nous passerons entièrement sous silence.

Nous laisserons également de côté tout ce qui concerne les maximums ou minimums *singuliers,* ceux par exemple pour les-

quels les valeurs correspondantes de x, $u(x)$, $u'(x)$, ..., $u^{(m)}(x)$ feraient toujours entrer la composante F dans une phase singulière.

96. La recherche d'un maximum ou minimum de l'intégrale (5) exige ainsi l'introduction préalable de ce paramètre a, que nous avons expliquée tout à l'heure, puis le calcul de $S'(a)$, par suite celui des dérivées partielles par rapport à a des diverses quantités intéressées dans les opérations conduisant à l'expression générale de $S'(a)$. Au lieu de ces dérivées, et conformément à un usage que nous respecterons, bien qu'il nous paraisse incommode, nous considérerons, ce qui revient au même, les différentielles, par rapport à a, des quantités en question; on les nomme leurs *variations* et on les représente par les caractéristiques δ, δ^2, δ^3, ...

Pour les variations *premières*, les seules que nous ayons à faire intervenir, cette définition donne ainsi

$$\delta x_1 = \frac{dx_1}{da}\,da, \quad \delta u_1 = \frac{du_1}{da}\,da, \quad \ldots, \quad \delta u_1^{(i)} = \frac{du_1^{(i)}}{da}\,da, \quad \ldots,$$

$$\delta x_2 = \frac{dx_2}{da}\,da, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots,$$

$$\delta u = \frac{du(x, a)}{da}\,da, \quad \ldots, \quad \delta u^{(i)} = \frac{du^{(i,0)}(x, a)}{da}\,da, \quad \ldots$$

Ceci bien entendu, le développement de $\delta S = S'(a)\,da$, sous la forme voulue, s'obtient par la mise en œuvre des principes suivants dont on fait un usage continuel dans toutes les questions de ce genre.

I. *On a*

$$(9) \left\{ \begin{aligned} \delta S &= F(x_2, u_2, u'_2, \ldots, u_2^{(m)})\,\delta x_2 - F(x_1, u_1, u'_1, \ldots, u_1^{(m)})\,\delta x_1 \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_2} [\delta F(x, u, u', \ldots, u^{(m)})]\,dx. \end{aligned} \right.$$

C'est ce qui résulte immédiatement de la règle donnée au n° 259* pour la différentiation d'une intégrale définie, par rapport à une variable paramétrique (a ici) engagée aussi bien dans les limites que dans la fonction à intégrer; seulement le formulaire est très légèrement modifié par la substitution des différentielles aux dérivées.

II. *La variation* δF *d'une fonction composée différentielle de* x, u, *telle que* $F(x, u, u', \ldots, u^{(m)})$ *est donnée par la formule*

$$(10) \qquad \delta F = \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u^{(m)}}\delta u^{(m)}.$$

Ceci est l'application directe de la règle du n° 256* à

$$F(x, u, u', \ldots, u^{(m)}),$$

fonction composée de u, u', ..., $u^{(m)}$ qui sont des fonctions simples dépendant toutes de la variable introduite a, dont l'autre variable x est naturellement indépendante; seulement les différentielles ont encore été substituées aux dérivées.

III. *Pour un indice quelconque* i *de différentiation par rapport à* x, *on a*

$$(11) \qquad \delta u^{(i)} = \frac{d^i}{dx^i}\delta u.$$

Car, le premier membre étant $\frac{du^{(i,0)}(x, a)}{da}da$, et le second étant $\frac{d^i[u^{(0,1)}(x, a)da]}{dx^i}$, tous deux ont $u^{(i,1)}(x, a)da$ pour valeur commune.

IV. *On a*

$$(12) \qquad [\delta u^{(i)}]_{x=x_1} = \left[\frac{d^i\delta u}{dx^i}\right]_{x=x_1} = \delta u_1^{(i)} - u_1^{(i+1)}\delta x_1,$$

avec pareille formule pour l'indice 2 *substitué à* 1.

Comme $u_1^{(i)}$ n'est pas autre chose que $u^{(i,0)}(x_1, a)$, c'est-à-dire une fonction composée de a et de x_1 fonction simple de a après l'introduction de ce paramètre dans les quantités (1), (2), on a

$$\begin{aligned}
\frac{du_1^{(i)}}{da} &= \frac{\partial u^{(i,0)}(x_1, a)}{\partial a} + \frac{\partial u^{(i,0)}(x_1, a)}{\partial x_1}\frac{dx_1}{da}, \\
&= \left[\frac{du^{(i,0)}(x, a)}{da}\right]_{x=x_1} + \left[\frac{du^{(i,0)}(x, a)}{dx}\right]_{x=x_1}\frac{dx_1}{da}, \\
&= \left[\frac{du^{(i,0)}(x, a)}{da}\right]_{x=x_1} + u^{(i+1,0)}(x_1, a)\frac{dx_1}{da},
\end{aligned}$$

ou bien, en multipliant tout par da,

$$\delta u_1^{(i)} = [\delta u^{(i)}]_{x=x_1} + u_1^{(i+1)} \delta x_1,$$

relation équivalente à (12).

97. Nous pouvons maintenant développer δS de la manière à laquelle nous faisions allusion tout à l'heure.

L'emploi successif des formules (9), (10), (11) donne immédiatement

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta S = F_2 \delta x_2 - F_1 \delta x_1 + \int_{x_1}^{x_2} \Big[& U \delta u + U' \frac{d\delta u}{dx} + \ldots \\ & + U^{(i)} \frac{d^i \delta u}{dx^i} + \ldots + U^{(m)} \frac{d^m \delta u}{dx^m} \Big] dx, \end{aligned} \right.$$

où pour simplifier l'écriture nous avons représenté par F_2, F_1 les coefficients de δx_2, δx_1 dans la relation (9), et par U, U', ..., $U^{(m)}$ les dérivées partielles de la composante F figurant dans la relation (10), savoir $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial u'}$, ..., $\frac{\partial F}{\partial u^{(m)}}$.

L'intégration par parties, mentionnée au n° 271*, donne ensuite

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} U^{(i)} \frac{d^i \delta u}{dx^i} dx = \; & \Big[(U^{(i)})_2 \Big(\frac{d^{i-1}\delta u}{dx^{i-1}}\Big)_2 - \Big(\frac{dU^{(i)}}{dx}\Big)_2 \Big(\frac{d^{i-2}\delta u}{dx^{i-2}}\Big)_2 + \ldots \\ & \qquad + (-1)^{i-1} \Big(\frac{d^{i-1}U^{(i)}}{dx^{i-1}}\Big)_2 (\delta u)_2 \Big] \\ & - \Big[(U^{(i)})_1 \Big(\frac{d^{i-1}\delta u}{dx^{i-1}}\Big)_1 - \Big(\frac{dU^{(i)}}{dx}\Big)_1 \Big(\frac{d^{i-2}\delta u}{dx^{i-2}}\Big)_1 + \ldots \\ & \qquad + (-1)^{i-1} \Big(\frac{d^{i-1}U^{(i)}}{dx^{i-1}}\Big)_1 (\delta u)_1 \Big] \\ & + \int_{x_1}^{x_2} (-1)^i \frac{d^i U^{(i)}}{dx^i} \delta u \, dx. \end{aligned} \right.$$

Ici, $\frac{d^j U^{(i)}}{dx^j}$ représente la dérivée $j^{\text{ième}}$ par rapport à x, de

$$U^{(i)}\Big(x, u, \frac{du}{dx}, \ldots, \frac{d^m u}{dx^m}\Big),$$

fonction composée différentielle de x et de u, fonction simple de x; on a, par exemple,

$$\frac{dU'}{dx} = \frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial U'}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial U'}{\partial u'}\frac{d^2 u}{dx^2} + \ldots + \frac{\partial U'}{\partial u^{(m)}}\frac{d^{m+1} u}{dx^{m+1}}.$$

Quant aux indices 1, 2 placés aux pieds d'expressions entre parenthèses, ils indiquent qu'il s'agit des valeurs prises par elles en $x = x_1$ ou $= x_2$.

La substitution à $\left(\frac{d^j \delta u}{dx^j}\right)_1$, $\left(\frac{d^j \delta u}{dx^j}\right)_2$, des quantités identiques $(\delta u^{(j)})_1$, $(\delta u^j)_2$ (96, III), puis à ces dernières, des différences

$$\delta u_1^{(j)} - u_1^{(j+1)} \delta x_1, \quad \delta u_2^{(j)} - u_2^{(j+1)} \delta x_2 \qquad (96, \text{IV})$$

change la formule (14) en

$$(15) \qquad \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}^{(i)} \frac{d^i \delta u}{dx^i} dx = {}^{(i)}\mathfrak{S} + \int_{x_1}^{x_2} (-1)^i \frac{d^i \mathrm{U}^{(i)}}{dx^i} \delta u . dx$$

où ${}^{(i)}\mathfrak{S}$ représente une certaine expression linéaire et homogène par rapport à

$$\delta x_1, \quad \delta u_1, \quad \delta u'_1, \quad \ldots, \quad \delta u_1^{(i-1)}, \quad \delta x_2, \quad \delta u_2, \quad \delta u'_2, \quad \ldots, \quad \delta u_2^{(i-1)},$$

dont les coefficients sont des fonctions déterminées de

$$\begin{gathered} x_1, \quad u_1, \quad u'_1, \quad \ldots, \quad u_1^{(m+i-1)}, \\ x_2, \quad u_2, \quad u'_2, \quad \ldots, \quad u_2^{(m+i-1)}. \end{gathered}$$

Enfin l'application de la formule (15) à la transformation des diverses parties dans lesquelles se décompose naturellement l'intégrale figurant dans la relation (13) conduit à

$$(16) \qquad \delta \mathrm{S} = \mathfrak{S} + \int_{x_1}^{x_2} \mathfrak{U}\left(x, u, \frac{du}{dx}, \ldots, \frac{d^{2m} u}{dx^{2m}}\right) \delta u . dx,$$

où, d'une part,

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{S} = {} & \mathcal{X}_1 \delta x_1 + \mathfrak{M}_1 \delta u_1 + \mathfrak{M}'_1 \delta u'_1 + \ldots + \mathfrak{M}_1^{(m-1)} \delta u_1^{(m-1)} \\ & + \mathcal{X}_2 \delta x_2 + \mathfrak{M}_2 \delta u_2 + \mathfrak{M}'_2 \delta u'_2 + \ldots + \mathfrak{M}_2^{(m-1)} \delta u_2^{(m-1)}, \end{aligned} \right.$$

expression linéaire et homogène par rapport aux $2m$ variations mises en évidence, dont les coefficients sont des fonctions déterminées de

$$\begin{gathered} x_1, \quad u_1, \quad u'_1, \quad \ldots, \quad u_1^{(2m-1)}, \\ x_2, \quad u_2, \quad u'_2, \quad \ldots, \quad u_2^{(2m-1)}, \end{gathered}$$

où d'autre part

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathfrak{U}\left(x, u, \frac{du}{dx}, \ldots, \frac{d^{2m} u}{dx^{2m}}\right) \\ & = \mathrm{U} - \frac{d\mathrm{U}'}{dx} + \frac{d^2 \mathrm{U}''}{dx^2} - \ldots + (-1)^i \frac{d^i \mathrm{U}^{(i)}}{dx^i} + \ldots + (-1)^m \frac{d^m \mathrm{U}^{(m)}}{dx^m}, \end{aligned} \right.$$

fonction composée différentielle de x, u, d'ordre $2m$ évidemment, du moins en général.

Ce sont les formules (16), (17), (18) qui fournissent le développement de δS dont nous avons besoin.

98. Nous passons à la conclusion de cette recherche.

I. *Pour avoir* $S'(\mathrm{a}) = 0$, *ou, ce qui revient au même,*

(19) $$(\delta S)_{a=\mathrm{a}} = S'(\mathrm{a})\,da = 0,$$

il faut avant tout que $\mathrm{u}(x) = u(x, \mathrm{a})$ *satisfasse à l'équation différentielle d'ordre* $2m$

(20) $$\mathfrak{U}\left(x, \mathrm{u}, \frac{d\mathrm{u}}{dx}, \dots, \frac{d^{2m}\mathrm{u}}{dx^{2m}}\right) = 0$$

ayant pour premier membre le multiplicateur de δu *sous l'intégrale de la relation* (16).

Parmi les manières possibles d'introduire le paramètre a dans les quantités qu'il est permis d'en rendre dépendantes, cela après leur détermination supposée faite, il y en a évidemment une infinité consistant à en laisser quelques-unes indépendantes de lui, notamment celles dont les variations se montrent dans la formule (17), celles aussi qui figurent dans les conditions aux limites (3), c'est-à-dire, si $\mathcal{K}_1$ est le plus grand des nombres $m-1$, k_1 et $\mathcal{K}_2$ le plus grand des nombres $m-1$, k_2, à laisser, quel que soit a, égales à

$$\mathrm{x}_1,\quad \mathrm{u}_1,\quad \mathrm{u}'_1,\quad \dots,\quad \mathrm{u}_1^{(\mathcal{K}_1)},\quad \mathrm{x}_2,\quad \mathrm{u}_2,\quad \mathrm{u}'_2,\quad \dots,\quad \mathrm{u}_2^{(\mathcal{K}_2)},$$

les quantités dont les valeurs générales ont été représentées par mêmes lettres italiques.

En procédant ainsi, ce qui ne viole pas les conditions aux limites, on réduit à zéro les variations de toutes ces quantités, moyennant quoi la formule (17) donne

(21) $$\mathfrak{S} = 0,$$

quel que soit a et, en particulier, pour $a = \mathrm{a}$.

Quant à la fonction $u(x, a)$, elle prend évidemment la forme

$$u(x, a) = \mathrm{u}(x) + (a-\mathrm{a})(x-\mathrm{x}_1)^{\mathcal{K}_1+1}(x-\mathrm{x}_2)^{\mathcal{K}_2+1}\varepsilon(x, a),$$

puisque la différence $u(x, a) - \mathrm{u}(x)$ doit, pour $a = \mathrm{a}$, s'évanouir quelle que soit x et, quel que soit a, s'annuler encore elle et ses dérivées par rapport à x jusqu'à l'ordre $\mathcal{K}_1$ pour $x = \mathrm{x}_1$, jusqu'à l'ordre $\mathcal{K}_2$ pour $x = \mathrm{x}_2$. Comme on a, d'autre part,

$$\mathfrak{z}(x, a) = {}^{(0)}\mathfrak{z}(x) + {}^{(1)}\mathfrak{z}(x)(a - \mathrm{a}) + {}^{(2)}\mathfrak{z}(x)(a - \mathrm{a})^2 + \ldots$$

${}^{(0)}\mathfrak{z}(x)$, ${}^{(1)}\mathfrak{z}(x)$, ... étant maintenant des fonctions de x entièrement arbitraires, et avec cela

$$\delta\mathrm{u}(x) = \delta\mathrm{x}_1 = \delta\mathrm{x}_2 = 0,$$

il vient facilement

$$(\delta u)_{a=\mathrm{a}} = (x - \mathrm{x}_1)^{\mathcal{K}_1+1}(x - \mathrm{x}_2)^{\mathcal{K}_2+2}\,{}^{(0)}\mathfrak{z}(x)\,da,$$

formule dont la combinaison avec (16) et (21) laisse simplement

$$(\delta \mathrm{S})_{a=\mathrm{a}} = da \int_{\mathrm{x}_2}^{\mathrm{x}_1} dx \left\{ \left[\mathfrak{U}\left(x, \mathrm{u}, \frac{d\mathrm{u}}{dx}, \ldots, \frac{d^{2m}\mathrm{u}}{dx^{2m}}\right) \times (x - \mathrm{x}_1)^{\mathcal{K}_1+1}(x - \mathrm{x}_2)^{\mathcal{K}_2+1} \right] {}^{(0)}\mathfrak{z}(x) \right\}.$$

Pour que cette intégrale s'évanouisse quelle que soit la nature de ${}^{(0)}\mathfrak{z}(x)$, il faut donc que le facteur entre crochets qui y multiplie cette fonction soit nul, quelle que soit x de x_1 à x_2; sans cela en effet, on rendrait cette intégrale évidemment non nulle en substituant à ${}^{(0)}\mathfrak{z}(x)$ quelque fonction offrant pour toute valeur de x le même signe que le facteur en question. Or ceci exige que l'équation (20) soit satisfaite pour x comprise entre x_1, x_2, par suite pour $x = \mathrm{x}_1$ et $x = \mathrm{x}_2$ aussi, puisque les valeurs que son premier membre prend alors sont les limites vers lesquelles il tend quand on fait tendre x vers x_1 ou vers x_2.

II. L'intégration de l'équation différentielle (20) donne (si l'on néglige ses intégrales singulières possibles)

(22) $$\mathrm{u}(x) = \mathfrak{v}(x, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{2m}),$$

où $\mathfrak{v}$ est une fonction déterminée de x et des $2m$ constantes arbitraires $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{2m}$ (40*), à déterminer ultérieurement d'une manière convenable; elle donne par suite

(23) $$u(x, a) = \mathfrak{v}(x, C_1, C_2, \ldots, C_{2m}),$$

où $C_1, \ldots, C_{2m}$ représentent maintenant $2m$ fonctions arbitraires

de a, se réduisant à $C_1, \ldots, C_{2m}$ pour $a = \mathrm{a}$; car à présent on ne peut plus introduire le paramètre a dans la fonction $u(x)$, autrement que par l'intermédiaire des constantes arbitraires, seuls éléments d'indétermination lui restant.

L'adoption de cette expression de $u(x, a)$ pour u dans la formule (16) annulant ainsi en $a = \mathrm{a}$ le coefficient de δu sous l'intégrale, cela quelle que soit x à cause de l'équation différentielle (20), annule aussi la valeur de cette intégrale pour $a = \mathrm{a}$; elle réduit par suite la condition (19) à

$$(24)\quad \begin{cases} (\mathfrak{S})_{a=\mathrm{a}} = \Big\{ \mathfrak{X}_1\,\delta x_1 + \ldots + \mathfrak{M}_1^{(m-1)}\,\delta u_1^{(m-1)} \\ \qquad + \mathfrak{X}_2\,\delta x_2 + \ldots + \mathfrak{M}_2^{(m-1)}\,\delta u_2^{(m-1)} \Big\}_{a=\mathrm{a}} = 0. \end{cases}$$

Reste à satisfaire à cette dernière, tout en respectant celles (3) relatives aux limites.

En appelant K_1 le plus grand des nombres $2m - 1$, k_1 et K_2 le plus grand des nombres $2m - 1$, k_2, en faisant ensuite $x = x_1$ dans la relation (23) différentiée 0, 1, 2, ..., K_1 fois par rapport à x, puis $x = x_2$ dans la même relation différentiée 0, 1, 2, ..., K_2 fois il vient

$$(25)\quad \begin{cases} u_1 = \varphi(x_1, C_1, \ldots, C_{2m}), \quad u_1' = \varphi'(x_1, C_1, \ldots, C_{2m}), \quad \ldots \\ \qquad u_1^{(K_1)} = \varphi^{(K_1)}(x_1, C_1, \ldots, C_{2m}), \\ u_2 = \varphi(x_2, C_1, \ldots, C_{2m}), \quad u_2' = \varphi'(x_2, C_1, \ldots, C_{2m}), \quad \ldots \\ \qquad u_2^{(K_2)} = \varphi^{(K_2)}(x_2, C_1, \ldots, C_{2m}), \end{cases}$$

et la substitution de ces expressions dans les équations (3) les change en

$$(26)\quad \begin{cases} \mathfrak{L}_1(x_1, x_2, C_1, \ldots, C_{2m}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{L}_k(x_1, x_2, C_1, \ldots, C_{2m}) = 0. \end{cases}$$

Cela posé, nous distinguerons trois cas.

1° Si ces équations finies, aux inconnues

$$(27)\quad x_1, \quad x_2, \quad C_1, \quad \ldots, \quad C_{2m},$$

sont incompatibles, on ne peut donner satisfaction simultanée aux conditions (3) et à l'équation différentielle (20); *l'intégrale* (5) *ne peut être rendue ni maximum ni minimum* (¹).

(¹) On rencontrerait une impossibilité de ce genre, si, en Géométrie, on cher-

2° Si les équations (26) constituent un système possible et déterminé, d'où l'on tire, par exemple,

$$(28)\qquad x_1 = \mathrm{x}_1, \qquad x_2 = \mathrm{x}_2, \qquad C_1 = \mathrm{C}_1, \qquad \ldots, \qquad C_{2m} = \mathrm{C}_{2m},$$

on ne pourra satisfaire aux équations (3) qu'en attribuant aux quantités (1), (2) les valeurs *invariables* fournies par ces dernières formules et (25), par suite, qu'en faisant nulles, quel que soit a, toutes les variations figurant dans la condition (24). Cette condition se trouve ainsi satisfaite d'elle-même; la condition générale (19) sera donc satisfaite par

$$\mathrm{u}(x) = \varphi(x, \mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_{2m}), \qquad x_1 = \mathrm{x}_1, \qquad x_2 = \mathrm{x}_2,$$

non autrement, et *ces déterminations rendront l'intégrale* (5) *maximum, ou minimum ou non,* suivant que la nature spéciale de la question comportera l'une ou l'autre de ces éventualités.

3° Si enfin les mêmes équations (26) constituent un système possible mais indéterminé, leur résolution fournira pour quelques-unes des quantités (27), $q_{\prime}, q_{\prime\prime}, \ldots, q_{(g)}$, par exemple, des expressions

$$(29)\qquad q_{\prime} = \mathrm{Q}_{\prime}({}'q, {}''q, \ldots, {}^{(h)}q), \qquad \ldots, \qquad q_{(g)} = \mathrm{Q}_{(g)}({}'q, \ldots, {}^{(h)}q),$$

où les autres

$$(30)\qquad {}'q, \quad {}''q, \quad \ldots, \quad {}^{(h)}q$$

resteront des fonctions absolument arbitraires de a, elles et par suite leurs variations. Le transport des expressions (29) dans les formules (25), puis la différentiation de celles-ci par rapport à a, puis enfin la substitution aux quantités et aux variations entrant dans la condition (24) des expressions ainsi obtenues pour elles, au moyen des indéterminées (30) et de leurs variations, met cette condition sous la forme

$${}'\mathfrak{Q}({}'\mathrm{q}, \ldots, {}^{(h)}\mathrm{q})(\delta\,{}'q)_{\mathrm{a}} + \ldots + {}^{(h)}\mathfrak{Q}({}'\mathrm{q}, \ldots, {}^{(h)}\mathrm{q})(\delta\,{}^{(h)}q)_{\mathrm{a}} = 0.$$

Les h variations qui figurent ici étant tout à fait arbitraires,

---

chait *l'arc de longueur minimum parmi ceux qui ont pour extrémités deux points donnés et pour tangentes en ces points deux droites données aussi.*

cette équation entraîne les h suivantes

$$'\mathfrak{Q}('q, \ldots, {}^{(h)}q) = 0, \quad \ldots, \quad {}^{(h)}\mathfrak{Q}('q, \ldots, {}^{(h)}q) = 0,$$

dont la résolution fait connaître les valeurs que les quantités (30) doivent avoir pour $\alpha = a$. Les formules (29) fournissent ensuite les valeurs correspondantes des autres quantités (27), c'est-à-dire les limites cherchées x_1, x_2 de l'intégrale (5) et les valeurs à attribuer aux constantes $C_1, \ldots, C_{2m}$ dans la formule (22) pour obtenir la fonction $u(x)$.

On peut évidemment exécuter ce calcul de la manière plus élégante que voici. Les formules (25) et celles s'en déduisant par une différentiation relative à α

$$\delta u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial C_1}\delta C_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial C_{2m}}\delta C_{2m}, \quad \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots,$$

permettent de mettre la condition (24) sous la forme

$$(31) \qquad \mathcal{A}_1\delta x_1 + \mathcal{A}_2\delta x_2 + \mathcal{B}_1\delta C_1 + \ldots + \mathcal{B}_{2m}\delta C_{2m} = 0,$$

où n'entrent plus que les quantités (27) et leurs variations, ces dernières toujours à titre linéaire et homogène, et où, nonobstant la suppression des accolades faite désormais pour simplifier, il demeure sous-entendu qu'il ne s'agit que des valeurs de ces quantités et de leurs variations pour $\alpha = a$. La différentiation des équations (26) faite par rapport à α donne d'autre part

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial x_2}\delta x_2 + \dfrac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial C_1}\delta C_1 + \ldots + \dfrac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial C_{2m}}\delta C_{2m} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial \mathfrak{L}_k}{\partial x_1}\delta x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{array} \right.$$

équations permettant d'exprimer certaines variations en fonctions linéaires et homogènes des autres qui demeurent entièrement arbitraires. En portant donc ces expressions des premières variations dans le premier membre de la condition (31), ordonnant par rapport aux autres variations, puis égalant à zéro tous les coefficients de ces dernières, on obtiendra les équations à adjoindre au système (26) pour en tirer les valeurs voulues des quantités (27).

dont x_1, x_2 puis la détermination cherchée de $u(x)$ comme tout à l'heure.

On forme évidemment ces équations additionnelles et avec elles d'autres qui sont certainement satisfaites aussi, en associant de toutes les manières possibles $k+1$ colonnes de coefficients de variations dans les équations (31), (32), puis égalant à zéro les déterminants de ces associations.

III. Dans le cas fréquent où l'on a $k_1 = k_2 = m - 1$, par suite $K_1 = K_2 = 2m - 1$, où l'on a aussi $k \leqq 2m - 2$, il est préférable d'opérer la détermination précédente comme il suit.

Les $2m$ formules, placées dans les m premières colonnes du Tableau (25), peuvent en général être résolues par rapport à C_1, C_2, ..., C_{2m}, quelles que soient les valeurs attribuées aux $2m+2$ quantités

$$(33) \qquad \begin{cases} x_1, & u_1, & u_1', & \ldots, & u_1^{(m-1)}, \\ x_2, & u_2, & u_2', & \ldots, & u_2^{(m-1)}, \end{cases}$$

qui toutes ainsi restent des fonctions arbitraires de a, sauf les conditions aux limites se réduisant ici à

$$(34) \quad L_1(x_1, u_1, u_1', \ldots, u_1^{(m-1)}, x_2, u_2, u_2', \ldots, u_2^{(m-1)}) = 0, \quad \ldots, \quad L_k = 0.$$

Cette observation faite, on raisonnera à fort peu près comme à la fin de l'alinéa précédent.

Si $k = 2m+2$, et si les équations (34) forment un système déterminé, leur simple résolution fournira les valeurs voulues des $2m+2$ inconnues (33); car l'invariabilité de celles-ci entraîne

$$\delta x_1 = \delta u_1 = \ldots = \delta u_1^{(m-1)} = \delta x_2 = \delta u_2 = \ldots = \delta u_2^{(m-1)} = 0,$$

d'où satisfaction assurée à la condition (24). On aura ainsi, d'abord les limites de l'intégrale, puis ensuite, au moyen des $2m$ formules (25) considérées, les valeurs à attribuer aux constantes arbitraires dans la formule (22). Si $k < 2m+2$, la différentiation des équations (34), par rapport à a, conduit aux k équations

$$(35) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial L_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial L_1}{\partial u_1}\delta u_1 + \ldots + \dfrac{\partial L_1}{\partial u_2^{(m-1)}}\delta u_2^{(m-1)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

entre lesquelles et la condition (24) on éliminera le plus grand

nombre possible de variations (k en général); dans le résultat de cette élimination, on égalera à zéro les multiplicateurs des $2m+2-k$ autres variations, et ces nouvelles équations adjointes aux k conditions (34) ainsi qu'aux $4m$ formules (25) formeront un système de $6m+2$ équations à résoudre numériquement pour obtenir les valeurs des $6m+2$ inconnues $x_1, u_1, u'_1, \ldots, u_1^{(2m-1)}$, $x_2, u_2, \ldots, u_2^{(2m-1)}$, $C_1, C_2, \ldots, C_{2m}$, dont les dernières portées dans la formule (23) achèveront la détermination de la fonction inconnue u.

Ces $2m+2-k$ équations complémentaires seront ainsi à choisir convenablement, quelquefois même à volonté, parmi toutes celles égalant à zéro les déterminants de $k+1$ colonnes quelconques des coefficients de variations dans les équations (24), (35) qui les contiennent toutes d'une manière linéaire et homogène.

IV. Ajoutons à cette solution des observations de détail trouvant quelques applications dans la pratique.

1° Quand la composante F ne contient pas u, on a $U = \frac{\partial F}{\partial u} = 0$ identiquement, et la formule (18) réduit l'équation différentielle fondamentale (20) à

$$-\frac{dU'}{dx} + \frac{d^2 U''}{dx^2} - \ldots + (-1)^m \frac{d^m U^{(m)}}{dx^m} = 0$$

dont le premier membre est la dérivée première d'une fonction composée différentielle évidente de x, u. En égalant donc celle-ci à une constante arbitraire, on obtient immédiatement l'intégrale première

$$-U' + \frac{dU''}{dx} - \ldots + (-1)^m \frac{d^{m-1} U^{(m)}}{dx^{m-1}} = C'.$$

Si F ne contenait ni u, ni u', on aurait $U = U' = 0$, d'où l'intégrale seconde

$$U'' - \frac{dU'''}{dx} + \ldots = C'x + C'',$$

et ainsi de suite.

2° En supposant, au contraire, F indépendante de x, et $= 2$ seulement l'ordre m de la fonction composée différentielle (4), on a $F^{(1,0,0,0)}(x, u, u', u'') = 0$ identiquement, d'où simplement

$$(36) \qquad \frac{dF}{dx} = U \frac{du}{dx} + U' \frac{d^2 u}{dx^2} + U'' \frac{d^3 u}{dx^3}.$$

L'équation différentielle (20) se réduisant alors à

$$o = U - \frac{dU'}{dx} + \frac{d^2U''}{dx^2},$$

l'élimination de U, au moyen de la relation (36), la change visiblement en

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\left(U' \frac{du}{dx}\right) + \frac{d}{dx}\left(U'' \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{dU''}{dx}\frac{du}{dx}\right).$$

On a donc alors cette intégrale première

$$F = \left(U' - \frac{dU''}{dx}\right)\frac{du}{dx} + U'' \frac{d^2u}{dx^2} + C'''$$

qui s'adjoint naturellement aux intégrales trouvées ci-dessus (1°) quand les causes assurant l'existence de toutes agissent simultanément.

99. Quelquefois, mais c'est bien rare, *la fonction composée* (4) *renferme en outre une ou plusieurs quantités du genre de* (1), (2), c'est-à-dire quelques valeurs prises aux limites de l'intégrale (5) par x, u, u', ... En supposant, pour fixer les idées, qu'elle en renferme une seule, et en représentant celle-ci par λ, voici les modifications fort légères à apporter dans les raisonnements ci-dessus (96 *et suiv.*).

1° Comme il s'agit maintenant de $F(x, u, u', \ldots, u^{(m)}, \lambda)$, il faut ajouter au second membre de la formule (10) le terme

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}\delta\lambda.$$

2° Par suite, le groupe $\mathfrak{H}$ de la formule (16) contient en plus le terme

$$\left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial \lambda}\, dx\right]\delta\lambda$$

pouvant fort bien se réduire avec un autre terme en $\delta\lambda$ qui s'y trouverait déjà.

3° L'équation différentielle fondamentale (20) contient λ à titre de variable paramétrique, et son intégrale générale est ainsi une fonction déterminée, non seulement de x et de constantes arbitraires, mais encore de λ.

4° Après l'obtention de cette intégrale générale, après l'exécution de l'intégration définie de x_1 à x_2 que comporte son calcul, le multiplicateur de $\delta\lambda$ dans le groupe $\mathfrak{S}$ devient ainsi une fonction déterminée des quantités (27) et de λ.

5° La détermination s'achève ensuite comme dans l'alinéa II du n° 98, à cela près que les conditions aux limites (3) peuvent ne pas contenir λ; que les seconds membres des formules (25) contiennent certainement cette quantité, et que, si λ est $u_i^{(j)}$, j étant $> K_i (i = 1$ ou $= 2)$, il faut adjoindre à ces formules

$$\lambda = u_i^{(j)} = \upsilon^{(j)}(x_i, C_1, \ldots, C_{2m}, \lambda)$$

pour pouvoir exprimer toujours au moyen des quantités (27) seulement, toutes les valeurs de u, u', ... qui sont à considérer aux limites de l'intégrale (5).

100. Passons au cas où *la fonction composée différentielle* F *figurant dans l'intégrale définie proposée* (5) *dépendrait de plusieurs fonctions simples indéterminées*, de deux seulement u, v pour fixer les idées, et serait ainsi

$$F(x, u, u', \ldots, u^{(m)}, v, v', \ldots, v^{(n)}).$$

La formule (10) devient naturellement

$$(37) \qquad \delta F = \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u^{(m)}}\delta u^{(m)} + \frac{\partial F}{\partial v}\delta v + \ldots + \frac{\partial F}{\partial v^{(n)}}\delta v^{(n)},$$

moyennant quoi et l'intégration par parties pratiquée au commencement du n° 97, on arrive facilement à

$$(38) \qquad \delta S = \mathfrak{S} - \int_{x_1}^{x_2} (\mathfrak{U}\,\delta u + \mathfrak{V}\,\delta v)\,dx,$$

où, en représentant par $U, \ldots, U^{(m)}, V, \ldots, V^{(n)}$ les coefficients des variations dans la relation (37), on a

$$\mathfrak{U} = U - \frac{dU'}{dx} + \ldots + (-1)^m \frac{d^m U^{(m)}}{dx^m},$$

$$\mathfrak{V} = V - \frac{dV'}{dx} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n V^{(n)}}{dx^n},$$

où $\mathfrak{S}$ est toujours une expression linéaire et homogène par rapport aux variations de x_1, x_2 et des valeurs correspondantes de u,

u', ..., v, v', ..., ayant pour coefficients des fonctions déterminées de quantités de ce genre.

I. Si l'indétermination des fonctions simples u, v est complète (sauf les très légères restrictions imposées par les conditions aux limites), celle des fonctions de x à prendre pour leurs variations δu, δv (en $a = \mathrm{a}$) l'est dans la même mesure, et, en raisonnant exactement comme au n° 98, I, on trouvera que la condition $\delta S = 0$ entraîne d'abord les deux équations différentielles simultanées entre u et v

$$(39) \qquad \mathfrak{U} = 0, \qquad \mathfrak{V} = 0,$$

par suite avec elles

$$(40) \qquad \mathfrak{S} = 0$$

(aucune confusion n'étant maintenant à craindre, nous simplifierons nos notations en y supprimant, comme nous avons déjà commencé à le faire, toute distinction entre les quantités encore indéterminées et ce qu'elles sont après leur détermination).

L'intégration des équations (39) donne u et v exprimées en fonction de x et d'un certain nombre de constantes arbitraires à déterminer ensuite ainsi que x_1, x_2 de manière à donner satisfaction simultanée à la condition (40) ainsi qu'à celles

$$L_1 = \ldots = L_k = 0$$

pouvant être imposées, aux limites, entre x_1, u_1, u'_1, ..., x_2, u_2, u'_2, ... La méthode à suivre est toute semblable à celle des alinéas II et suivants du numéro cité.

II. Si, au contraire, u, v sont assujetties à satisfaire à une équation donnée que nous supposerons finie et écrirons

$$(41) \qquad \Omega(x, u, v) = 0,$$

on ne pourra y introduire le paramètre a que de manière à vérifier cette équation quel que soit a. En la différentiant donc par rapport à a, il vient

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial \Omega}{\partial v}\,\delta v = 0,$$

équation en vertu de laquelle δv, par exemple, reste entièrement

arbitraire (sauf encore les menues restrictions apportées par les conditions aux limites) et δu s'exprime au moyen d'elle par la formule

$$\delta u = -\frac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial v}}{\dfrac{\partial\Omega}{\partial u}}\,\delta v.$$

La substitution de cette expression de δu transforme le multiplicateur de dx sous l'intégrale (38) en le produit de deux facteurs dont l'un est une fonction composée différentielle déterminée de u, v, l'autre δv. Le raisonnement du n° 98, I, fondé toujours sur l'indétermination quasi absolue de δv, montre que le premier facteur doit être nul identiquement, c'est-à-dire que u, v doivent satisfaire à l'équation différentielle

$$(42)\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{U} & \mathfrak{V} \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial u} & \dfrac{\partial\Omega}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

qui réduit la condition générale $\delta S = 0$ à

$$(43)\qquad \mathfrak{S} = 0.$$

Les équations (41), (42) forment un système différentiel *mixte* (376*, V) d'où l'on tire u, v en fonction de x et de constantes arbitraires. Ces dernières se calculent ensuite ainsi que x_1, x_2 en faisant intervenir la condition (43) et celles aux limites s'il y a à se préoccuper de quelques-unes. Nous croyons inutile de revenir sur ce point.

III. Maintenant, le lecteur aperçoit sans doute comment il faudrait procéder, si la fonction différentielle F à intégrer dépendait de fonctions simples indéterminées en nombre quelconque, soit indépendantes les unes des autres, soit liées entre elles par des équations finies plus ou moins nombreuses, ou bien encore si elle contenait en outre quelques valeurs aux limites de x, u, u', ..., v, v', ..., w, w', ..., ... (*Cf.* 99).

IV. Nous laissons de côté, parce qu'il est inutile à la pratique, le cas où, au lieu d'être toutes finies comme dans l'alinéa II, les liaisons préalables imposées aux fonctions inconnues u, v, ... comprendraient des équations différentielles.

101. On peut encore se proposer de rendre l'intégrale (5) maximum ou minimum sous les conditions aux limites (3) mais compliquées par cette autre *que la fonction indéterminée u rende une seconde intégrale du même genre égale à une quantité donnée;* c'est ce qu'on nomme un maximum ou minimum *relatif* (*Cf.* 91). La nouvelle condition s'exprime ainsi par une équation de la forme

$$(44) \qquad \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{G}\,dx = \mathrm{T},$$

où G est comme F une fonction composée différentielle donnée de u, de tel ou tel ordre, T une quantité donnée aussi numériquement.

En égalant à zéro la variation de l'intégrale (5), celle aussi de l'intégrale (44), puisqu'elle doit conserver, quel que soit a, la valeur invariable T, en développant ces variations comme nous l'avons expliqué au n° 97, on trouve les deux conditions à remplir simultanément

$$(45) \qquad \mathfrak{S} + \int_{x_1}^{x_2} \mathfrak{U}\,\delta u.dx = 0,$$

$$(46) \qquad \mathfrak{R} - \int_{x_1}^{x_2} \mathfrak{T}\,\delta u.dx = 0,$$

où les multiplicateurs de δu sous les intégrales sont des fonctions composées différentielles déterminées de u, et où les termes en dehors sont des sommes de produits de fonctions déterminées des valeurs aux limites de x, u, u', ... par les variations de quelques-unes de ces valeurs.

En posant donc

$$(47) \qquad \int_{x_1}^{x} \mathfrak{T}\,\delta u.dx = \omega(x),$$

la nature de cette fonction ω et l'équation (46) l'assujettissent aux simples conditions

$$(48) \qquad \omega(x_1) = 0, \qquad \omega(x_2) = -\mathfrak{R}.$$

La différentiation de la relation (47) donne

$$\delta u = \frac{1}{\mathfrak{T}} \frac{d\omega}{dx},$$

moyennant quoi la condition (45) devient

$$\mathfrak{S} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{T}} \frac{d\omega}{dx} \cdot dx = 0,$$

puis, en intégrant par parties et ayant égard aux conditions (48)

(49) $$\mathfrak{S} - \mathfrak{R}\left[\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{T}}\right]_{x=x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d}{dx} \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{T}}\right) \omega \, . \, dx = 0.$$

La fonction à intégrer est le produit de deux facteurs dont le second ω est une fonction de x entièrement arbitraire, sauf les très légères restrictions (48). En raisonnant donc encore comme au n° 98, I, on arrive à la condition

$$\frac{d}{dx} \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{T}} = 0,$$

d'où, en intégrant,

(50) $$\mathfrak{U} - \Gamma \mathfrak{T} = 0,$$

Γ désignant quelque constante, ce qui réduit l'équation (49) à

(51) $$\mathfrak{S} - \Gamma \mathfrak{R} = 0.$$

La condition (50) est une équation différentielle, d'un ordre μ plus ou moins élevé, dont l'intégration fournit u en fonction de x, de μ constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots C_\mu$ et de Γ jouant ici le rôle de variable paramétrique. Ces μ constantes avec x_1, x_2 se déterminent en fonction de Γ par les conditions aux limites (3) combinées avec (51), comme nous l'avons expliqué (98, II et *suiv.*). Après quoi la condition (44) devient une équation numérique en Γ, à résoudre pour avoir la valeur de cette quantité.

La marche à suivre revient évidemment ainsi à considérer l'intégrale définie

(52) $$\int_{x_1}^{x_2} (\mathrm{F} - \Gamma \mathrm{G}) \, dx,$$

où Γ joue le rôle d'une variable paramétrique, et, sans s'inquiéter de Γ, à chercher son maximum ou minimum *absolu*, c'est-à-dire

sous les seules conditions aux limites (3), abstraction faite de la condition (44), puis enfin à tirer Γ de cette dernière devenue une équation numérique.

Si l'on avait à satisfaire à la fois à plusieurs conditions de la forme (44), où $'G$, $''G$, ... représenteraient les fonctions à intégrer, on procéderait de la même manière en remplaçant par $F - {}'\Gamma{}'G - {}''\Gamma{}''G - \dots$ celle figurant dans l'intégrale (5). Avec un peu d'attention le lecteur le constatera sans peine.

102. Cette introduction, à côté des variables fondamentales, d'un paramètre tel que α, quelquefois de plusieurs, est encore utile dans certains autres cas, fort limités d'ailleurs. On a donné le nom de *Calcul des variations* à l'ensemble des règles qui président au maniement des expressions transformées de cette manière. Mais de cette théorie spéciale la partie la plus importante, et cela de beaucoup, est celle ayant trait aux maximums ou minimums des intégrales *simples*, dont nous venons de parler, à ceux aussi des intégrales *multiples*, que l'exiguïté de notre cadre nous force à passer sous silence. Elle trouve en Géométrie et en Mécanique des applications fort intéressantes qui toutefois nous sembleraient ici mal placées.



CHAPITRE VI.

INTÉGRALES MULTIPLES RÉELLES ([1]).

Intégrales doubles.

103. Jusqu'à présent, les intégrales multiples ne se sont guère introduites que dans les applications géométriques et mécaniques; c'est pourquoi nous ne considérerons que des quantités réelles. Quand il n'y a que 2 ou 3 variables indépendantes, comme dans les questions dont nous allons nous occuper, on peut les représenter par les coordonnées rectilignes rectangulaires d'un point indéterminé dans le plan ou dans l'espace; nous procéderons ainsi, aussi bien pour augmenter la clarté des choses que pour en faciliter les applications rappelées à l'instant.

Nous appellerons x, y les coordonnées d'un point indéterminé d'un plan, rapporté à deux axes rectangulaires donnés sur celui-ci, et A une aire simple délimitée dans ce plan par une enceinte consistant en un enchaînement d'arcs de lignes dépourvus de points singuliers, aire partant limitée dont nous représenterons la mesure numérique par la même lettre A. Nous appellerons enfin $f(x, y)$ une fonction demeurant réelle et olotrope pour toutes les valeurs de x et de y qui correspondent aux points intérieurs à l'aire A. Cela posé, on a ce théorème fondamental :

Si l'on découpe l'aire A *en portions quelconques, de mesures*

$$(1)\qquad a'_m,\quad a''_m,\quad \ldots,\quad a_m,\quad \ldots$$

dont la dimension maximum de chacune, c'est-à-dire la plus

([1]) Le lecteur insuffisamment familier avec les notions géométriques que nous faisons intervenir dans cette théorie serait prié de lire en même temps le Chapitre I de notre quatrième Partie (*Applications géométriques*).

grande distance de deux points à elle intérieurs, soit inférieure à une même quantité positive l_m tendant vers zéro quand m augmente indéfiniment, et si l'on représente indéfiniment par x, y les coordonnées d'un point quelconque intérieur à l'aire partielle a_m, la somme variable

$$S_m = \Sigma f(x, y) a_m \tag{2}$$

tend vers une limite S dont la valeur est indépendante du mode de fractionnement progressif de l'aire A.

I. *En appelant* M *la limite supérieure positive qu'on peut assigner à $|f(x, y)|$, valeur numérique de $f(x, y)$, pour toutes les valeurs de x, y à considérer, on a pour $|S_m|$, valeur numérique de toute somme du genre de* (2), *l'inégalité invariable*

$$|S_m| < \text{MA}. \tag{3}$$

On a évidemment

$$|f(x, y) a_m| < \text{M} a_m,$$

d'où l'inégalité (3) en substituant successivement à a dans celle-ci toutes les quantités (1), ajoutant membre à membre, puis ayant égard à $a'_m + a''_m + \ldots + a_m + \ldots = \text{A}$.

II. Subdivisons arbitrairement chacune des aires partielles (1) en d'autres plus petites, par exemple a_m en a'_{m+p}, a''_{m+p}, ..., a_{m+p}, ... Le terme $f(x, y) a_m$ sera remplacé dans l'expression (2) par la somme analogue

$$\Sigma f(x, y) a_{m+p} \tag{4}$$

étendue à toutes ces subdivisions de a_m.

Mais si l'on suppose que x, y correspondent maintenant à un point déterminé de l'aire a_m, et que $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ désignent indéfiniment les coordonnées d'un autre point intérieur à la même aire, Δx, Δy inférieures à l_m seront, par hypothèse, des quantités infiniment petites, et la formule de Taylor finissant par être applicable donnera

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \text{X}\,\Delta x + \text{Y}\,\Delta y, \tag{5}$$

où X, Y sont des fonctions olotropes de x, y, Δx, Δy, dont les valeurs numériques finissent par se maintenir au-dessous de

certaines quantités positives invariables Ξ, H pouvant être assignées (200*).

A cause de $a'_{m+p} + a''_{m+p} + \ldots = a_m$, la formule (5), appliquée à la transformation de la somme (4), donne

$$\Sigma f(x, y) a_{m+p} = f(x, y) a_m + \Sigma [X \Delta x + Y \Delta y] a_{m+p},$$

moyennant quoi, en appelant S_{m+p} la somme (4) étendue maintenant à toutes les subdivisions $\ldots, a_{m+p}, \ldots$ de toutes les aires partielles (1), on aura

$$S_{m+p} - S_m = \Sigma\Sigma [X \Delta x + Y \Delta y] a_{m+p};$$

puis (I)

$$(6) \qquad |S_{m+p} - S_m| < (\Xi + H) l_m A;$$

ceci en vertu des inégalités

$$|\Delta x| < l_m, \quad |\Delta y| < l_m, \quad |X| < \Xi, \quad |Y| < H.$$

Comme l_m est une quantité infiniment petite, la différence $S_{m+p} - S_m$ en est une aussi, à cause de l'inégalité (6); par suite (54*) la somme S_m converge certainement vers quelque limite S, pour tout fractionnement progressif déterminé de l'aire A.

III. En appelant enfin S_n une seconde somme analogue à (2) mais construite en découpant progressivement l'aire A et ses subdivisions successives suivant une autre loi quelconque, en imaginant un troisième fractionnement pouvant être considéré comme résultant à la fois de la subdivision des aires partielles qui ont donné S_m, de celles aussi qui ont donné S_n, et en appelant S_q la somme engendrée par cette troisième opération, on peut écrire

$$S_n - S_m = (S_q - S_m) - (S_q - S_n).$$

Or nous avons trouvé (II)

$$\lim(S_q - S_m) = \lim(S_q - S_n) = 0;$$

on a donc aussi $\lim(S_n - S_m) = 0$, d'où $\lim S_n = \lim S_m = S$, ce que nous avions à prouver encore.

IV. Ces diverses considérations supposent implicitement que $f(x, y)$ est olotrope pour des valeurs de x, y, non seulement correspondant aux points intérieurs à l'aire A, mais encore respec-

tivement comprises entre les abscisses et les ordonnées extrêmes de tous ces points, ce qui n'est pas tout à fait la même chose. Mais quand la première condition est remplie, ce que nous supposons expressément, il est évident qu'on peut toujours décomposer l'aire A en un nombre limité d'autres pour chacune desquelles la seconde l'est aussi. L'existence de la limite S se trouve ainsi assurée pour chacune de ces aires partielles et par suite pour l'aire totale A.

104. Dans l'expression (2) on peut même, sans altérer sa limite, *supposer que les aires partielles* (1) *ne remplissent pas exactement l'aire donnée* A, *pourvu que leur somme ait* A *pour limite*. Car, en nommant ..., α_m, ... des aires partielles de ce genre et ..., β_m, ... d'autres aires infiniment petites aussi, dont l'addition aux premières reproduit A, on aura évidemment

$$\lim \Sigma\beta_m = 0, \qquad \text{et} \qquad \Sigma f(x, y)\beta_m < \text{M}\,\Sigma\beta_m \qquad (103, \text{I}),$$

d'où

$$\lim \Sigma f(x, y)\beta_m = 0,$$

et, par suite,

$$\lim \Sigma f(x, y)\alpha_m = \lim[\text{S}_m - \Sigma f(x, y)\beta_m] = \lim \text{S}_m = \text{S}.$$

Pour les aires partielles (1), on peut donc se contenter de prendre des rectangles contigus, sans vides entre eux, dont les côtés sont parallèles aux axes et tous $< l_m$, moyennant bien entendu que les sommets saillants de la ligne brisée formant l'enceinte de l'aire variable résultant de leur agglomération soient tous sur le contour de l'aire A; car, d'après la théorie des aires planes, la somme de ces rectangles tend forcément vers A. En prenant alors pour α_m un rectangle de cette sorte, nommant x, y les coordonnées de celui de ses sommets pour lequel elles ont les moindres valeurs algébriques et $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ celles du sommet opposé, Δx, Δy seront deux quantités positives, on aura $\alpha_m = \Delta x\,\Delta y$; par suite, on pourra écrire

$$\text{S} = \lim \Sigma f(x, y)\Delta x\,\Delta y,$$

étant sous-entendu que les divers systèmes de valeurs de x, y, Δx, Δy seront choisis de manière à assurer la disposition topographique ci-dessus spécifiée pour les rectangles α_m.

105. *Le calcul de la limite* S *se ramène toujours à des intégrations de différentielles comportant chacune une seule variable indépendante.* Nous le démontrerons comme il suit.

I. 1° *En décomposant l'aire* A *en une somme ou différence de plusieurs autres* $A_1 \mp A_2 + \ldots \mp A_k$ *dans chacune desquelles* $f(x, y)$ *jouit des mêmes propriétés que dans la proposée, et représentant par* $S_1, S_2, \ldots, S_k$ *les valeurs de* S *correspondant à ces diverses aires partielles, on a*

$$S = S_1 \mp S_2 \mp \ldots \mp S_k.$$

2° *Si* $g_1, g_2, \ldots, g_k$ *désignant des constantes quelconques, et* $f_1, f_2, \ldots f_k$ *des fonctions toutes olotropes pour les valeurs considérées de* x, y, *on a*

$$f = g_1 f_1 + g_2 f_2 + \ldots + g_k f_k,$$

on aura aussi

$$S = g_1 \lim \Sigma f_1 \Delta x \Delta y + g_2 \lim \Sigma f_2 \Delta x \Delta y + \ldots + g_k \lim \Sigma f_k \Delta x \Delta y.$$

Ces deux points sont assez évidents pour pouvoir se passer de toute démonstration.

II. *Quand l'aire* A *se réduit à un rectangle à côtés parallèles aux axes et déterminés les uns par les abscisses* x, X (x < X), *les autres par les ordonnées* y, Y (y < Y), *quand la fonction* $f(x, y)$ *se réduit aussi au monôme entier* $x^m y^n$, *la limite* S *est donnée par la formule*

$$S = \int_x^X \int_y^Y x^m y^n \, dx \, dy \qquad (233^*).$$

où les intégrations doivent être exécutées dans les intervalles réels [xX], [yY].

Décomposons, en effet, le rectangle proposé en d'autres tous infiniment petits au moyen de parallèles aux axes menées les unes par les points d'abscisses croissantes $\ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots$, les autres par les points d'ordonnées croissantes aussi $\ldots, y_j, y_{j+1}, \ldots$. La formule du binôme donne immédiatement

$$x_{i+1}^{m+1} - x_i^{m+1} = (m+1) x_i^m (x_{i+1} - x_i) + \{\theta_p x_i^{m+1-p} (x_{i+1} - x_i)^p\},$$
$$y_{j+1}^{n+1} - y_j^{n+1} = (n+1) y_j^n (y_{j+1} - y_j) + \{\varpi_q y_j^{n+1-q} (y_{j+1} - y_j)^q\},$$

les accolades embrassant des agrégats de termes en nombres limités de la forme de ceux mis en évidence, où p, q varient respectivement de $p = 2$ à $p = m + 1$, de $q = 2$ à $q = n + 1$ inclusivement, où θ_p, τ_q représentent des coefficients numériques indépendants de i et de j.

En multipliant ces deux relations membre à membre, attribuant à x_i, y_j toutes les combinaisons de valeurs possibles, X, Y exceptées, puis sommant les résultats, on en trouve facilement une autre pouvant être écrite

$$\begin{aligned}(\mathrm{X}^{m+1} - \mathrm{x}^{m+1})(\mathrm{Y}^{n+1} - \mathrm{y}^{n+1})\\ = (m+1)(n+1)\Sigma x^m y^n \Delta x \,\Delta y + \left\{ \Theta_{\varpi,\chi} \Sigma x^\mu y^\nu \Delta x^\varpi \Delta y^\chi \right\}.\end{aligned}$$

Ici x, y, Δx, Δy désignent indéfiniment les quantités x_i, y_j, $x_{i+1} - x_i$, $y_{j+1} - y_j$; les accolades renferment encore des termes en nombre limité de la nature de celui mis en évidence, où les exposants sont des entiers positifs vérifiant les inégalités $\mu \leq m$, $\nu \leq n$, $\varpi + \chi \geq 3$, où $\Theta_{\varpi,\chi}$ représente un coefficient numérique.

Actuellement faisons tendre vers zéro ε, dimension maximum des rectangles partiels; chacun des termes entre accolades tend aussi vers zéro, car celui mis en évidence, par exemple, est évidemment moindre numériquement que

$$\Theta_{\varpi,\chi} \mathrm{M}_{\mu,\nu} \varepsilon^{\varpi+\chi-2} \Sigma \Delta x \,\Delta y = \Theta_{\varpi,\chi} \mathrm{M}_{\mu,\nu} \varepsilon^{\varpi+\chi-2} \mathrm{A},$$

$\mathrm{M}_{\mu,\nu}$ représentant ici la valeur numérique maximum du monôme $x^\mu y^\nu$ dans le rectangle proposé A (103, I). Toute l'expression indiquée par les accolades est donc infiniment petite, d'où

$$\lim \Sigma x^m y^n \Delta x \,\Delta y = \frac{\mathrm{X}^{m+1} - \mathrm{x}^{m+1}}{m+1} \, \frac{\mathrm{Y}^{n+1} - \mathrm{y}^{n+1}}{n+1} = \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \int_{\mathrm{y}}^{\mathrm{Y}} x^m y^n \, dx \, dy.$$

III. *L'aire* A *ayant toujours la forme rectangulaire spécifiée ci-dessus* (II), *si la fonction* $f(x, y)$ *est la somme d'une série entière en* $x - x_0$, $y - y_0$,

$$\ldots + h_{m,n}(x - x_0)^m (y - y_0)^n + \ldots,$$

dont les rayons de convergence surpassent, le premier R_x, *la plus grande valeur numérique des différences* $\mathrm{x} - x_0$, $\mathrm{X} - x_0$,

le second R_y, *celle des différences* $y - y_0$, $Y - y_0$, *on a encore*

$$(7) \qquad \lim \Sigma f(x, y) \Delta x \Delta y = \int_x^X \int_y^Y f(x, y)\, dx\, dy.$$

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons $x_0 = y_0 = 0$, cas auquel tous les autres se ramènent immédiatement, et, par suite,

$$(8) \qquad f(x, y) = \ldots + h_{m,n} x^m y^n + \ldots,$$

avec

$$\left.\begin{matrix}|x|\\|X|\end{matrix}\right\} < R_x \qquad \left.\begin{matrix}|y|\\|Y|\end{matrix}\right\} < R_y.$$

En représentant par $f_1, f_2, \ldots$ les termes de la série (8) rangés dans un ordre déterminé quelconque, on peut écrire

$$f = f_1 + f_2 + \ldots + f_k + \mathfrak{F}_k,$$

où le reste $\mathfrak{F}_k$ est une fonction olotrope de x, y à la valeur numérique de laquelle, et cela pour toutes les combinaisons de valeurs à considérer pour x, y, on peut assigner une même limite supérieure $\mathfrak{M}_k$ tendant vers zéro pour k infini (117*). On a donc (I, 2°)

$$\lim \Sigma f \Delta x \Delta y = \lim \Sigma f_1 \Delta x \Delta y + \lim \Sigma f_2 \Delta x \Delta y + \ldots \\ + \lim \Sigma f_k \Delta x \Delta y + \lim \Sigma \mathfrak{F}_k \Delta x \Delta y,$$

puis

$$\lim \Sigma f \Delta x \Delta y = \int_x^X \int_y^Y f_1\, dx\, dy + \ldots + \int_x^X \int_y^Y f_k\, dx\, dy + \lim \Sigma \mathfrak{F}_k \Delta x \Delta y.$$

parce que $f_1, \ldots, f_k$ sont des monômes entiers en x, y (II), puis enfin

$$\lim \Sigma f \Delta x \Delta y = \int_x^X \int_y^Y f_1\, dx\, dy + \int_x^X \int_y^Y f_2\, dx\, dy + \ldots,$$

parce que $\lim \Sigma \mathfrak{F}_k \Delta x \Delta y$, numériquement inférieure à $\mathfrak{M}_k A$ (103, I), tend vers zéro pour k infini.

Maintenant, le second membre de cette relation est égal à celui de la formule (7), parce que, à l'intérieur de cercles de convergence, une série entière s'intègre terme à terme comme un simple polynôme (275*).

IV. *La formule* (7) *subsiste quelle que soit la fonction olotrope* $f(x, y)$.

Car on peut décomposer le rectangle considéré A en un nombre limité d'autres analogues mais assez petits pour que, relativement à chacun d'eux, un seul développement de Taylor puisse représenter $f(x, y)$ aussi longtemps que x, y sont les coordonnées d'un point non extérieur. Cela posé, on retrouvera la formule en question en l'écrivant pour chacun de ces rectangles partiels (III), en ajoutant toutes les formules particulières ainsi obtenues, en réduisant leurs premiers membres par la relation de l'alinéa I (1°), en profitant enfin de la contiguïté des chemins d'intégration partiels pour réduire aussi leurs seconds membres en une seule intégrale double prise de x à X, de y à Y.

V. *Si l'aire A est limitée par les parallèles à l'axe des y, ayant pour équations : $x = \mathrm{x}$, $x = \mathrm{X}\ (> \mathrm{x})$, par les arcs qu'elles découpent sur les lignes ayant pour équations : $y = \varphi(x)$, $y = \Phi(x)$, où $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ sont deux fonctions olotropes donnant algébriquement $\varphi(x) < \Phi(x)$, quelle que soit x dans l'intervalle* [xX], *on a*

$$\lim \Sigma f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y = \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} dx \int_{\varphi(x)}^{\Phi(x)} f(x, y)\,dy. \tag{9}$$

En supposant, pour fixer les idées, $\varphi(x)$ décroissante et $\Phi(x)$ croissante dans l'intervalle considéré (21**), et en découpant l'aire A par des parallèles à l'axe des y répondant aux abscisses variables $\ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots$, dont deux consécutives ont une différence numériquement inférieure à quelque quantité positive infiniment petite ε, on décomposera immédiatement le second membre de la formule (9) en une somme de termes de la forme

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{\varphi(x_i)}^{\Phi(x_i)} f(x, y)\,dy, \tag{10}$$

et en une autre somme de termes analogues à

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \left[\int_{\Phi(x_i)}^{\Phi(x)} f(x, y)\,dy - \int_{\varphi(x_i)}^{\varphi(x)} f(x, y)\,dy\right]. \tag{11}$$

La somme des quantités (10) a pour limite le premier membre de la formule (9); car (IV), (I) elle est précisément la valeur de cette expression prise dans un assemblage de rectangles contigus dont l'aire totale converge vers A (104).

La somme des quantités (11) est infiniment petite; car en appelant M la limite supérieure assignable à la valeur numérique de $f(x, y)$ pour toutes les valeurs de x, y répondant à des points non extérieurs à l'aire A, μ une limite supérieure de $-\Delta\varphi(x)$ ou $\Delta\Phi(x)$ pour toute valeur de x non extérieure à l'intervalle $[x\,X]$ et de $\Delta x < \varepsilon$, chacune des intégrales simples placées entre crochets dans son terme général (11) est moindre numériquement que $M\mu$, leur différence que $2M\mu$, ce terme général lui-même que $2M\mu(x_{i+1} - x_i)$ et la somme dont il s'agit que $2M\mu(X - x)$ (237*).

Or μ peut être supposée infiniment petite; car $\Delta\varphi(x)$ par exemple est de la forme $\psi(x, \Delta x)\Delta x$, où $\Delta x < \varepsilon$ est une quantité infiniment petite et $\psi(x, \Delta x)$ une fonction de x, Δx, à la valeur numérique de laquelle on peut assigner une limite supérieure indépendante de ces quantités dans les circonstances où nous raisonnons (200*).

La première somme a donc pour limite le second membre de la formule (9) qui se trouve ainsi démontrée.

De très légères modifications qui s'aperçoivent d'elles-mêmes suffiront à adapter ce raisonnement aux cas où les fonctions $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ ne sont pas la première décroissante, la seconde croissante, comme nous l'avons supposé.

VI. Quand le contour de l'aire A a toute autre forme, il suffit de le découper en arcs de courbes ayant chacun une même représentation analytique. Des parallèles à l'axe des y menées ensuite par les points de raccord de ces arcs contigus décomposeront cette aire en fragments de la forme considérée ci-dessus (V); à l'aide de la formule (9) on calculera $\lim\Sigma f(x, y)\Delta x\Delta y$ dans chacun de ces fragments, et la somme de ces résultats partiels sera celui se rapportant à l'aire totale.

On peut évidemment opérer aussi en décomposant l'aire A par des parallèles à l'axe des x; on a alors à calculer plusieurs intégrales doubles de la forme

$$\int_{y}^{Y} dy \int_{\psi(y)}^{\Psi(y)} f(x, y)\,dx,$$

où l'intégration par rapport à y est la dernière.

106. La nature spéciale du procédé qui permet ainsi de calculer la valeur de $\lim \Sigma f(x, y) \Delta x \Delta y$ a fait donner à cette quantité le nom d'*intégrale définie double de la différentielle partielle seconde* $f(x, y)\, dx\, dy$ *prise dans l'aire* A, et l'a fait représenter par la notation

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy, \tag{12}$$

à laquelle il faut, bien entendu, adjoindre mentalement la désignation des limites de cette aire.

107. *Le rapport de l'intégrale double* (12) *prise dans une aire variable dont tous les points sont infiniment voisins d'un point fixe* (x_0, y_0), *à la superficie* a *de l'aire dont il s'agit, a* $f(x_0, y_0)$ *pour limite.*

Pour tous les points de l'aire infiniment petite considérée, la formule de Taylor finit effectivement par donner

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)X + (y - y_0)Y,$$

X, Y désignant certaines fonctions olotropes de x, y (199*); d'où l'on tire

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy = af(x_0, y_0) + \int\int (x - x_0)X\, dx\, dy + \int\int (y - y_0)Y\, dx\, dy.$$

Si l'on nomme maintenant Ξ, H des limites supérieures invariables assignées aux valeurs numériques des fonctions X, Y pour toutes les combinaisons de valeurs de x, y représentées par des points intérieurs à une aire fixe dans laquelle l'aire a finisse par rester contenue (180*) et l la distance maximum de deux points quelconques non extérieurs à cette aire variable, les deux dernières intégrales doubles sont numériquement inférieures à $l\Xi a$, $l\mathrm{H}a$ (103, I), et la relation précédente donne en valeur absolue

$$\frac{1}{a}\int\int f(x, y)\, dx\, dy - f(x_0, y_0) < l(\Xi + \mathrm{H}).$$

Le premier membre de cette inégalité tend donc vers zéro, puisque l est par hypothèse une quantité infiniment petite.

108. *Si, en appelant* p, q *deux nouvelles variables indépendantes et* $\varphi(p, q)$, $\chi(p, q)$ *deux fonctions olotropes, les*

formules

$$(13)\qquad x = \varphi(p, q), \qquad y = \chi(p, q)$$

donnent les coordonnées des points intérieurs à l'aire A quand on attribue à p, q des valeurs égales à celles des points intérieurs à l'aire plane E construite dans un autre système de coordonnées rectilignes rectangulaires, on a la formule

$$(14)\qquad \iint f(x, y)\,dx\,dy = \iint F(p, q)\Omega(p, q)\,dp\,dq,$$

où $F(p, q)$ *représente la fonction composée* $f[\varphi(p, q), \chi(p, q)]$, *et* $\Omega(p, q)$ *le déterminant différentiel*

$$\begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dp} & \frac{d\varphi}{dq} \\ \frac{d\chi}{dp} & \frac{d\chi}{dq} \end{vmatrix},$$

où enfin l'intégrale du premier membre est prise dans A et celle du second dans E.

(Pour fixer les idées, nous supposons que $\Omega(p, q)$ reste positif dans l'aire E.)

Soient indéfiniment ε, ε_1, ε_2 trois points infiniment voisins les uns des autres dans l'aire E et (p, q), $(p + \Delta_1 p, q + \Delta_1 q)$, $(p + \Delta_2 p, q + \Delta_2 q)$ leurs coordonnées, puis α, α_1, α_2, les points qui leur correspondent dans l'aire A en vertu des formules (13) et (x, y), $(x + \Delta_1 x, y + \Delta_1 y)$, $(x + \Delta_2 x, y + \Delta_2 y)$ les coordonnées de ces derniers. Les points ε, ε_1, ε_2, s'ils ont été notés dans un ordre convenable, sont les sommets d'un triangle ayant pour surface

$$e = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \Delta_1 p & \Delta_1 q \\ \Delta_2 p & \Delta_2 q \end{vmatrix};$$

de même et à cause de $\Omega(p, q) > 0$, la quantité

$$a = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \Delta_1 x & \Delta_1 y \\ \Delta_2 x & \Delta_2 y \end{vmatrix}$$

finit par rester positive et mesure l'aire du triangle correspon-

dant $[\alpha\alpha_1\alpha_2]$. Ensuite la formule de Taylor donne

$$\Delta_1 x = \frac{d\varphi}{dp}\Delta_1 p + \frac{d\varphi}{dq}\Delta_1 q + \xi_1, \qquad \Delta_1 y = \frac{d\chi}{dp}\Delta_1 p + \frac{d\chi}{dq}\Delta_1 q + \eta_1,$$
$$\Delta_2 x = \frac{d\varphi}{dp}\Delta_2 p + \frac{d\varphi}{dq}\Delta_2 q + \xi_2, \qquad \Delta_2 y = \frac{d\chi}{dp}\Delta_2 p + \frac{d\chi}{dq}\Delta_2 q + \eta_2,$$

ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2 désignant des quantités infiniment petites du second ordre, les premières par rapport à $\Delta_1 p$, $\Delta_1 q$, les dernières par rapport à $\Delta_2 p$, $\Delta_2 q$; d'où simplement

$$(15) \qquad a = \Omega e + \mathfrak{S},$$

où $\mathfrak{S}$ est une série entière par rapport aux accroissements de p, q, dans chaque terme de laquelle on peut mettre en fonction un produit de trois au moins d'entre eux (distincts ou non) dont deux certainement pourvus d'indices différents.

Nommons maintenant h, k des quantités positives toutes deux inférieures à une quantité infiniment petite l, puis μ_1, ν_1, μ_2, ν_2, quatre quantités variables finies dont le déterminant

$$\mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2 = 2\delta$$

soit positif et toujours supérieur à quelque quantité positive invariable. En prenant

$$\Delta_1 p = \mu_1 h, \qquad \Delta_1 q = \nu_1 h,$$
$$\Delta_2 p = \mu_2 k, \qquad \Delta_2 q = \nu_2 k,$$

il viendra

$$e = \delta hk,$$

et la relation (15) pourra s'écrire

$$(16) \qquad a = e\left(\Omega + \frac{\mathfrak{S}}{\delta hk}\right) = e(\Omega + \theta),$$

où, à cause de la structure de $\mathfrak{S}$ relativement à $\Delta_1 p$, $\Delta_1 q$, $\Delta_2 p$, $\Delta_2 q$, l'expression θ est une série entière en h, k dont chaque terme contient soit h, soit k comme facteur et δ pour seul diviseur. On a ainsi

$$(17) \qquad \theta = uh + vk,$$

u, v représentant certaines fonctions de p, q, μ_1, ν_1, μ_2, ν_2, h, k,

qui demeurent olotropes pour toutes les valeurs de ces huit quantités qu'il y a lieu de considérer.

Cela posé, il est visible que l'on peut considérer E comme la limite d'une aire composée de triangles jointifs analogues à e, et par suite A comme la limite de la somme des triangles correspondants a, jointifs aussi. On aura donc (104)

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} \iint f(x,y)\,dx\,dy &= \lim \Sigma f(x, y)\,a \\ &= \lim \Sigma \mathrm{F}(p, q)\,\Omega e + \lim \Sigma \mathrm{F}(p, q)\,\theta e, \end{aligned} \right.$$

ceci à cause de la relation (16). Or, si l'on nomme M la valeur numérique maximum de $\mathrm{F}(p, q)$ dans l'aire E, et Θ celle assignable aussi pour les deux fonctions u, v à la fois, la relation (17) donne numériquement $\theta < 2\Theta l$, puis $\Sigma \mathrm{F}(p, q)\theta e < 2\mathrm{M}\Theta l \mathrm{E}$ et par suite, puisque l est infiniment petit,

$$\lim \Sigma \mathrm{F}(p, q)\,\theta e = 0.$$

La relation (18) équivaut donc à la formule (14) que nous voulions établir.

C'est en cela que consiste le changement des variables dans une intégrale double, ou bien, si on le veut, l'intégration double *par susbtitution* (*Cf.* 334*).

109. Quand la fonction f placée sous le double signe d'intégration dépend en outre de quelques variables paramétriques x', y', ..., mais cela bien entendu en restant olotrope par rapport à toutes les variables, *l'intégrale jouit de la même propriété relativement à* x', y', ..., *et elle peut être différentiée ou intégrée comme une intégrale simple, par l'exécution des mêmes opérations sous le double signe* (*Cf.* 231* *et suiv.*). Ce point, qui est évident quand il s'agit d'un monôme entier en $x - x_0$, $y - y_0$, $x' - x'_0$, $y' - y'_0$, ..., s'étend presque immédiatement à une série entière par rapport à ces différences, puis à un raccordement de pareilles séries quand la fonction f ne peut être représentée par un seul développement de ce genre pour toutes les valeurs des variables à considérer. Mais la facilité de la question et le désir d'abréger nous font supprimer toute indication plus détaillée.

110. Une intégrale double n'existe plus, et la notation (12) perd

toute signification quand les conditions essentielles sous lesquelles nous avons raisonné jusqu'ici ne sont pas toutes remplies, savoir : pour l'aire A, d'avoir une enceinte formée par des arcs dépourvus de tout point singulier, en particulier d'être limitée, pour la fonction $f(x, y)$ à intégrer, d'être olotrope en tout point non extérieur à cette aire.

On procède alors à peu près comme nous l'avons fait pour les intégrales simples (239* *et suiv.*) : on substitue à l'aire invariable A une aire variable A′ jouissant de la double propriété d'avoir l'aire A pour limite *géométrique*, de ne plus impliquer jamais aucune des singularités affectant celle-ci ou la fonction. S'il arrive que la valeur, variable aussi, de l'intégrale double prise dans A′ tende vers une même limite S, de quelque manière que cette aire variable ait été délimitée sous les deux conditions ci-dessus, *cette limite* S *se nomme, par convention, la valeur de l'intégrale* (12) *prise dans l'aire* A. Si non, on dit que la même intégrale est *indéterminée* ou *infinie* selon le cas.

Mais ce moyen de rendre parfois l'existence aux intégrales doubles illusoires leur imprime aussi le caractère *artificiel* sur lequel nous avons insisté en parlant des intégrales simples.

Intégrales triples.

111. En transportant dans l'espace les considérations développées dans le paragraphe précédent, et en suivant une marche toute semblable, on obtient la suite de propositions que nous allons énoncer, mais dont nous laisserons au lecteur le soin de faire les faciles démonstrations.

Si $f(x, y, z)$ est une fonction (réelle) olotrope pour toutes les valeurs des variables qui sont les coordonnées rectilignes rectangulaires de quelque point intérieur à un volume simple V *limité par un assemblage de plaques de surfaces dépourvues de points singuliers, elles et aussi leurs lignes de raccordement, si l'on représente en outre par $\ldots, v_m, \ldots$ des fragments à dimension maximum infiniment petite provenant d'une subdivision quelconque de* V*, la quantité*

$$S_m = \Sigma f(x, y, z) v_m,$$

où x, y, z sont les coordonnées d'un quelconque des points intérieurs à v_m, tend vers une limite S *qui est toujours la même* (*Cf.* 103).

On a en outre

$$|S| < MV,$$

M représentant la limite supérieure invariable qu'on peut assigner à $|f(x, y, z)|$ à l'intérieur de V.

112. *On a aussi*

$$S = \lim \Sigma f(x, y, z) \varphi_m,$$

..., φ_m, ... désignant des volumes infiniment petits quelconques dont l'agglomération converge seulement vers V (*topographiquement et numériquement*).

D'où la formule

$$S = \lim \Sigma f(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z \qquad (Cf.\ 104).$$

113. I. *Si le volume* V *est limité par des plaques jointives de surfaces cylindriques à génératrices parallèles à l'axe des z et par celles que leur ensemble découpe sur les deux surfaces ayant pour équations $z = \varphi(x, y)$, $z = \Phi(x, y)$, on a*

$$S = \int\int dx\, dy \int_{\varphi(x,y)}^{\Phi(x,y)} f(x, y, z)\, dz,$$

l'intégrale double relative à x, y étant prise dans l'aire découpée sur le plan des xy par l'assemblage des plaques cylindriques considérées.

II. *Si le même volume est limité par des plaques jointives de surfaces quelconques et par celles que l'ensemble des mêmes surfaces découpe sur les deux plans parallèles à celui des xy qui ont pour équations $z = \mathrm{z}$, $z = \mathrm{Z} (> \mathrm{z})$, on a*

$$S = \int_{\mathrm{z}}^{\mathrm{Z}} dz \int\int_{\Lambda_z} f(x, y)\, dx\, dy,$$

l'intégrale double relative à x, y étant prise dans l'aire variable Λ_z, projection sur le plan des xy, de celle découpée

par l'ensemble des surfaces considérées sur le plan parallèle au même plan des xy dont tous les points ont z pour troisième coordonnée commune.

114. Ces propositions conduisent à deux méthodes évidentes pour calculer la quantité S dans un volume V quelconque (*Cf.* 105).

Il suffira de décomposer V, additivement ou soustractivement, en volumes analogues à celui qui a été considéré dans la première, par des cylindres ayant pour génératrices des parallèles à l'un ou l'autre des trois axes, et pour directrices les lignes qui, sur l'enceinte du volume, séparent les plaques de surfaces ayant des représentations analytiques différentes.

On pourra tout aussi bien décomposer V en volumes du genre de ceux dont il s'agit dans la deuxième, au moyen de plans menés parallèlement à l'un ou à l'autre des trois plans coordonnés par les points de concours de deux arcs ou de plusieurs ayant des représentations analytiques différentes parmi ceux limitant les plaques de surfaces dont se compose l'enceinte du volume V.

On voit ainsi que *le calcul de la quantité* S *se décompose toujours en groupes de trois intégrations simples relatives à* x, y, z, *séparément, groupes dans chacun desquels la première intégration porte sur* $f(x, y, z)$, *la deuxième et la troisième sur les résultats des précédentes.*

A cause de cela, cette quantité S se nomme une *intégrale définie triple* et se représente par la notation

$$\iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

accompagnée de l'indication des limites du volume à l'intérieur duquel elle doit être prise.

115. Si v est un volume variable dont tous les points intérieurs sont infiniment voisins d'un point fixe donné (x_0, y_0, z_0), on a, en prenant l'intégrale triple dans ce volume,

$$\lim \frac{\iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{v} = f(x_0, y_0, z_0) \qquad (Cf.\ 107).$$

116. *En appelant p, q, r trois nouvelles variables, puis*

posant

$$x = \varphi(p, q, r), \qquad y = \chi(p, q, r), \qquad z = \psi(p, q, r),$$

$$F(p, q, r) = f(\varphi, \chi, \psi),$$

$$\Omega(p, q, r) = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dp} & \frac{d\varphi}{dq} & \frac{d\varphi}{dr} \\ \frac{d\chi}{dp} & \frac{d\chi}{dq} & \frac{d\chi}{dr} \\ \frac{d\psi}{dp} & \frac{d\psi}{dq} & \frac{d\psi}{dr} \end{vmatrix},$$

on change de variables par la formule

$$\int\int\int f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\int\int F(p, q, r)\Omega(p, q, r)\,dp\,dq\,dr,$$

la seconde intégrale devant s'étendre à un volume auxiliaire U *tel, que les coordonnées de ses points intérieurs portées dans les fonctions* φ, χ, ψ *reproduisent celles de tous les points intérieurs au volume où la première intégrale doit être prise* (*Cf.* 108).

117. Les observations générales des nos 109, 110 s'étendent d'elles-mêmes aux intégrales triples.

Il y a enfin des intégrales *quadruples, quintuples, etc.* qu'on renferme avec celles-ci sous la dénomination générique *d'intégrales multiples;* quand il s'agit exclusivement de quantités réelles, elles se traitent à fort peu près comme celles dont nous venons de parler par l'intervention des considérations propres *aux espaces fictifs à quatre, cinq, etc. dimensions.* On pourrait également former des expressions analogues par des intégrations successives de différentielles n'offrant pas toutes une seule variable principale. Mais toutes ces intégrales sont à fort peu près inusitées et presque entièrement inconnues.



ADDITION I.

PROPOSITION TOUT A FAIT ÉLÉMENTAIRE A SUBSTITUER AU LEMME DE CAUCHY DANS LA THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS.

118. Comme on a pu le remarquer, les théorèmes fondamentaux de la théorie générale des fonctions (ceux des nos 247*, 301*, 307*, 362* et suiv.) ont tous pour point d'appui essentiel la proposition du no 183*, déduite immédiatement d'un lemme dû à Cauchy qui se trouve rapporté au no 182*, avec de grandes modifications toutefois dans la démonstration et aussi dans la spécification des fonctions auxquelles il s'applique. Mais une très légère attention suffit aussi pour constater que l'efficacité de la formule (2) de ce no 183*, considérée comme base de ces divers théorèmes, tient uniquement à sa structure propre, nullement à cette circonstance que la quantité représentée par la lettre M est une limite supérieure plus ou moins stricte, du module de la fonction considérée dans les aires dont il est fait mention. Pour ce motif, et relativement à l'emploi que je viens de rappeler, cette proposition du no 183*, déduite de raisonnements assez laborieux et indirects, peut donc être remplacée par la suivante dont la démonstration semble être aussi facile et naturelle qu'il est permis de le désirer.

119. *Si la fonction $f(x, y, \ldots)$ est olotrope dans les aires limitées S_x, S_y, ..., avec les olomètres δ_x, δ_y, ... et si l'on représente par r_x, r_y, ... des quantités positives inférieures à δ_x, δ_y, ... respectivement, puis par $\mathcal{A}$ une constante positive convenablement choisie, on a, dans tout l'intérieur des mêmes aires et pour toutes valeurs des indices de différentiation m, n, ..., l'inégalité*

$$(1) \qquad \operatorname{mod} f^{(m,n\ldots)}(x, y, \ldots) < \mathcal{A} \frac{1.2\ldots m}{r_x^m} \frac{1.2\ldots n}{r_y^n} \cdots$$

1. *Soient*

$$(2)\qquad F(x, y, \ldots) = \Sigma(a_{\mathrm{m},\mathrm{n},\ldots}x^{\mathrm{m}}y^{\mathrm{n}}\ldots)$$

la somme d'une série entière admettant δ_x, δ_y, ... *pour rayons de convergence, et* δ'_x, δ'_y, ..., δ''_x, δ''_y, ... *des quantités positives donnant*

$$(3)\qquad \delta'_x < \delta''_x < \delta_x, \quad \delta'_y < \delta''_y < \delta_y, \quad \ldots.$$

Pour toutes valeurs de x, y, ... *remplissant les conditions*

$$(4)\qquad \operatorname{mod} x \leqq \delta'_x, \quad \operatorname{mod} y \leqq \delta'_y, \quad \ldots,$$

on a

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{mod} F^{(m,n,\ldots)}(x, y, \ldots) \leqq \dfrac{\alpha}{\left(1-\dfrac{\delta'_x}{\delta_x}\right)\left(1-\dfrac{\delta'_y}{\delta_y}\right)\cdots} \\ \qquad \times \dfrac{1.2\ldots m}{(\delta_x-\delta'_x)^m}\,\dfrac{1.2\ldots n}{(\delta_y-\delta'_y)^n}\cdots, \end{array}\right.$$

formule où α *désigne une certaine constante positive.*

L'hypothèse admise et les inégalités (3) assurant la convergence de la série (2), de celle aussi des modules de ses termes, pour $\operatorname{mod} x = \delta''_x$, $\operatorname{mod} y = \delta''_y$, ... (114*), la variante

$$\alpha_{\mathrm{m},\mathrm{n},\ldots}\,\delta''^{\mathrm{m}}_x\,\delta''^{\mathrm{n}}_y\ldots,$$

où

$$\alpha_{\mathrm{m},\mathrm{n},\ldots} = \operatorname{mod} a_{\mathrm{m},\mathrm{n},\ldots},$$

est infiniment petite, et en particulier finie. Quels que soient les indices m, n, ..., on a donc

$$\alpha_{\mathrm{m},\mathrm{n},\ldots}\,\delta''^{\mathrm{m}}_x\,\delta''^{\mathrm{n}}_y\ldots < \alpha,$$

où α représente quelque quantité positive convenable; on a, en d'autres termes,

$$\alpha_{\mathrm{m},\mathrm{n},\ldots} < \alpha\,\frac{1}{\delta''^{\mathrm{m}}_x}\,\frac{1}{\delta''^{\mathrm{n}}_y}\ldots.$$

Quand les conditions (4) sont remplies, on en conclut

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mod} D_{x,y,\ldots}^{(m,n,\ldots)}(a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n},\ldots}x^{\mathfrak{m}}y^{\mathfrak{n}},\ \ldots)\\
&\quad= [\mathfrak{m}(\mathfrak{m}-1)\ldots(\mathfrak{m}-m+1)]\\
&\qquad\times[\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)\ldots(\mathfrak{n}-n+1)]\ldots\alpha_{\mathfrak{m},\mathfrak{n},\ldots}(\operatorname{mod}x)^{\mathfrak{m}-m}(\operatorname{mod}y)^{\mathfrak{n}-n}\ldots\\
&\qquad<\frac{\alpha}{\delta_x''^{m}\,\delta_y''^{n}\ldots}[\mathfrak{m}(\mathfrak{m}-1)\ldots(\mathfrak{m}-m+1)]\\
&\qquad\times[\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)\ldots(\mathfrak{n}-n+1)]\ldots\left(\frac{\delta'_x}{\delta''_x}\right)^{\mathfrak{m}-m}\left(\frac{\delta'_y}{\delta''_y}\right)^{\mathfrak{n}-n}\ldots\\
&\qquad<\alpha\,\frac{1.2\ldots m}{\delta_x''^{m}}\,\frac{1.2\ldots n}{\delta_y''^{n}}\ldots\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+1+\mathfrak{m}-m-1)}{1.2\ldots(\mathfrak{m}-m)}\\
&\qquad\times\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+1+\mathfrak{n}-n-1)}{1.2\ldots(\mathfrak{n}-n)}\ldots\left(\frac{\delta'_x}{\delta''_x}\right)^{\mathfrak{m}-m}\left(\frac{\delta'_y}{\delta''_y}\right)^{\mathfrak{n}-n}\ldots.
\end{aligned}$$

Il en résulte (157*, 3°)

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mod} F^{(m,n,\ldots)}(x,y,\ \ldots)\leqq\Sigma[\operatorname{mod} D_{x,y\ldots}^{m,n,\ldots}(a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n},\ldots}x^{\mathfrak{m}}y^{\mathfrak{n}}\ldots)]\\
&\quad<\alpha\,\frac{1.2\ldots m}{\delta_x''^{m}}\,\frac{1.2\ldots n}{\delta_y''^{n}}\ldots\\
&\quad\times\sum\Bigg[\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+1+\mathfrak{m}-1)}{1.2\ldots\mathfrak{m}}\\
&\qquad\qquad\times\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+1+\mathfrak{n}-1)}{1.2\ldots\mathfrak{n}}\left(\frac{\delta'_x}{\delta''_x}\right)^{\mathfrak{m}}\left(\frac{\delta'_y}{\delta''_y}\right)^{\mathfrak{n}}\ldots\Bigg].
\end{aligned}$$

La somme qui figure dans ce dernier membre, et qui doit être étendue à toutes les combinaisons de valeurs nulles et positives des entiers $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, ..., est évidemment celle d'une progression géométrique ayant $m+1$ raisons égales à $\frac{\delta'_x}{\delta''_x}\ (<1)$, $n+1$ raisons égales à $\frac{\delta'_y}{\delta''_y}\ (<1)$; elle a donc pour valeur

$$1:\left[\left(1-\frac{\delta'_x}{\delta''_x}\right)^{m+1}\left(1-\frac{\delta'_y}{\delta''_y}\right)^{n+1}\ldots\right]\qquad(113^*),$$

et la substitution de cette expression dans l'inégalité précédente conduit immédiatement à la formule (5) qu'il s'agissait d'établir.

II. *L'exactitude de notre énoncé est assurée quand les dimensions des aires* S_x, S_y, ... (89*) *sont inférieures à des quantités positives* δ'_x, δ'_y, ... *limitées par les inégalités*

(6) $$\delta'_x<\delta_x-r_x,\quad \delta'_y<\delta_y-r_y,\quad \ldots.$$

A cause de ces conditions, et en posant

$$(7) \qquad r_x + \delta'_x = \delta''_x, \qquad r_y + \delta'_y = \delta''_y, \qquad \ldots,$$

on a évidemment les inégalités (3). Si, de plus, on nomme x_0, y_0, ... des valeurs initiales des variables prises à volonté dans les aires considérées, puis si, à partir d'elles, on développe $f(x, y, \ldots)$ par la formule de Taylor, il viendra

$$(8) \qquad f(x, y, \ldots) = \Sigma[a_{m,n,\ldots}(x - x_0)^m (y - y_0)^n \ldots],$$

série entière en $x - x_0$, $y - y_0$, ..., admettant δ_x, δ_y, ... pour rayons de convergence, et les inégalités

$$\bmod(x - x_0) < \delta'_x, \quad \bmod(y - y_0) < \delta'_y, \quad \ldots$$

subsistent tant que x, y, ... restent intérieures aux mêmes aires.

On obtiendra donc immédiatement l'inégalité (1) dans le cas qui nous occupe, en appliquant la formule (5) à la série (8), et en posant

$$\alpha : \left[\left(1 - \frac{\delta'_x}{r_x + \delta'_x}\right)\left(1 - \frac{\delta'_y}{r_y + \delta'_y}\right) \cdots\right] = \mathcal{A}.$$

III. *Notre proposition est vraie, quelles que soient les dimensions des aires* S_x, S_y, ...

Si δ'_x, δ'_y, ... représentent des quantités positives satisfaisant aux inégalités (6), on peut évidemment subdiviser les aires S_x, S_y, ... en des nombres limités de fragments dont les dimensions soient inférieures à δ'_x pour la première, à δ'_y pour la seconde, à ..., et les combinaisons d'une subdivision de S_x, avec une subdivision de S_y, avec ..., sont aussi en nombre limité N.

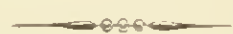
Comme notre énoncé s'applique à chacune de ces diverses combinaisons (II), sauf l'adoption successive, pour la constante $\mathcal{A}$, de certaines valeurs convenables $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, ..., $\mathcal{A}^{(N)}$, il s'appliquera évidemment aussi aux aires considérées tout entières, moyennant l'attribution à $\mathcal{A}$ d'une valeur quelconque supérieure à toutes celles-ci.

120. Outre sa simplicité, cette démonstration a l'avantage de rattacher immédiatement aux principes mêmes de l'existence des

séries entières, ceux qui confèrent une solidité inébranlable à la théorie des fonctions basée, comme elle l'est dans cet Ouvrage, sur la considération exclusive de ces séries.

Il est évident, en outre, qu'à l'aide de cette proposition on pourrait édifier, pour les fonctions réelles de variables réelles, la même théorie identiquement, mais affranchie cette fois de toute allusion aux quantités imaginaires. Elle semble donc enlever à l'introduction systématique des séries entières dans l'analyse le caractère artificiel qu'on peut lui avoir attribué en la croyant jusqu'ici inséparable de la considération des quantités imaginaires.

La substitution de l'énoncé précédent à celui du n° 183* peut abaisser les limites inférieures sur lesquelles ce dernier permet de compter pour les olomètres des fonctions dont il assure l'existence; car ces limites diminuent toujours quand $\mathcal{M}$ dans l'inégalité (1) ou M dans celle du numéro cité viennent à augmenter, et la première quantité ne peut être inférieure à la seconde. Mais les observations faites aux n°s 202* et 302*, VI ont montré l'inanité pratique de cet inconvénient.



ADDITION II.

DÉMONSTRATION DIRECTE DU LEMME DE CAUCHY.

121. Si, dans l'édification des principes essentiels de la théorie générale des fonctions, le lemme de Cauchy mis sous la forme que je lui ai donnée au n° 185* peut être remplacé par la proposition beaucoup plus simple qu'on vient de trouver au n° 119, il n'en est pas moins indispensable dans d'autres circonstances fort importantes aussi, par exemple pour les démonstrations des n°s 133*, 201*, 273* et suiv. (où l'on remarquera que la considération des quantités imaginaires est inévitable). Mais, une fois établis de cette autre manière, ces principes fournissent pour le lemme dont il s'agit une démonstration très naturelle que je vais exposer, en commençant par rappeler plusieurs points d'utilité générale sur lesquels j'aurai à m'appuyer.

I. *Si une fonction d'une seule variable $f(x)$ est olotrope, avec l'olomètre δ, dans une aire limitée S_x et sur son contour, on peut assigner trois constantes positives $\delta' < \delta$, Θ, Φ telles que, pour toute valeur de x non extérieure à S_x et pour toute valeur de l'accroissement h dont le module η est $\overline{\gtrless}\,\delta'$, on ait*

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{mod}[f(x+h)-f(x)] < \eta(\Theta - \Phi\eta).$$

Aussi longtemps que x n'est pas extérieure à l'aire en question et que η ne surpasse pas δ', les hypothèses admises permettent d'appliquer la formule de Taylor et d'écrire

$$f(x+h)-f(x) = h[f'(x)+h\varphi(x,h)],$$

d'assigner ensuite à $\operatorname{mod}\varphi(x,h)$ une limite supérieure Φ indépendante de x, h (200*), puis à $\operatorname{mod}f'(x)$ une limite supérieure Θ de même genre (180*).

Cela fait, la relation précédente conduit immédiatement à l'inégalité (1).

II. *Sous la même hypothèse accompagnée en outre par la condition pour $f'(x)$ de ne s'évanouir ni à l'intérieur de l'aire S_x, ni sur son contour, et en appelant $x^{(0)}$ une valeur particulière attribuée arbitrairement à x non en dehors de S_x, posant*

$$f(x^{(0)}) = t^{(0)},$$

puis appelant t une autre variable, l'équation

$$(2) \qquad f(x) = t$$

résolue par rapport à x fournit une fonction de t, prenant la valeur $x^{(0)}$ pour $t = t^{(0)}$, demeurant en outre olotrope [*localement* (175*, IV), *mais avec un olomètre restant au moins égal à quelque quantité positive invariable*] *aussi longtemps que t peut varier par cheminement sans entraîner la valeur de x au dehors de S_x.*

Quelle que soit x_i dans les conditions qui viennent d'être imposées à $x^{(0)}$, et en posant d'une part $f(x_i) = t_i$, en appelant $\mathfrak{b}$ d'autre part une constante positive de petitesse arbitraire, on peut assigner une autre constante positive $\mathfrak{g}$ telle que la même équation (2) *offre, pour toute valeur de t rendant*

$$\operatorname{mod}(t - t_i) \overline{\gtrless} \mathfrak{g},$$

une racine au moins donnant

$$\operatorname{mod}(x - x_i) < \mathfrak{b}.$$

Le premier point n'est que le cas le plus simple de la théorie générale des fonctions implicites (301*), pour l'édification de laquelle la proposition du n° 119 peut être substituée au lemme de Cauchy.

L'équivalent du dernier point est établi au n° 11**, III, où le raisonnement ne s'appuie toujours que sur la théorie générale des fonctions implicites.

III. *Si m et a désignent un entier positif et une quantité*

quelconque, l'équation numérique en x,

(3) $$x^m = a$$

offre toujours quelque racine pouvant être supposée positive quand a est de cette nature.

Les considérations précédentes (II) procurent une démonstration bien facile. Pour la fonction $f(x)$, on prendra le monôme entier x^m; dans le plan O_t servant à la notation graphique de la variable t, on délimitera une couronne $[r_t R_t]$ par deux circonférences ayant l'origine O_t pour centre commun et dont les rayons $r_t < R_t$ comprennent entre eux $\operatorname{mod} a$ et $\operatorname{mod} t^{(0)}$ à la fois; pour l'aire S_x on prendra une couronne limitée par deux circonférences décrites de l'origine O_x prise pour centre commun, avec des rayons r_x, R_x donnant

$$r_x^m < r_t, \quad R_x^m > R_t.$$

Cela posé, on constatera immédiatement que $x^{(0)}$ est intérieur à la couronne $[r_x R_x]$, que toute racine x de l'équation $x^m = t$ reste intérieure à la couronne $[r_x R_x]$ aussi longtemps que t ne sort pas de la couronne $[r_t R_t]$, et que dans cette dernière couronne par suite, puisque $f'(x) = mx^{x-1}$ ne peut s'y évanouir, la racine x qui se réduit à $x^{(0)}$ pour $t = t^{(0)}$ reste fonction localement olotrope de t. Une racine de l'équation numérique (3) sera donc fournie par la valeur finale de cette fonction implicite calculée sur un chemin (à côtés suffisamment petits) tracé arbitrairement de t_0 à a, dans l'intérieur de la couronne $[r_t R_t]$. (Au fond cette démonstration ne diffère pas de celle du n° 106**; j'y reviens toutefois pour mieux montrer qu'elle n'est encore qu'un corollaire très simple de la théorie générale des fonctions implicites.)

Quand a est une quantité positive, on peut prendre $x^{(0)} = 1$ d'où $t^{(0)} = 1$, et cheminer exclusivement sur la partie positive de l'axe des quantités réelles; tout étant réel dans les séries à employer, la racine trouvée ainsi pour l'équation (3) ne peut manquer de l'être aussi, et il est évident qu'elle est positive si m est impair, ou accompagnée d'une racine égale et de signe contraire si m est pair.

122. *Si dans une aire limitée S_x, ainsi que sur son contour C,*

la fonction $f(x)$ est olotrope (sans dégénérer en une constante), et si $x^{(0)}$ désigne une valeur quelconque de x intérieure à cette aire, on peut assigner sur le contour C quelque valeur X de x faisant naître l'inégalité

$$(4) \qquad \operatorname{mod} f(X) > \operatorname{mod} f(x^{(0)}).$$

I. Supposant d'abord, comme dans l'alinéa II du n° 121 dont nous conserverons les notations, que $f'(x)$ ne s'évanouit ni à l'intérieur de S_x, ni sur le contour C, nous poserons

$$f(x^{(0)}) = t^{(0)},$$

et nous appellerons t_0 une valeur de t, dont le module surpasse celui de $t^{(0)}$, et qui soit assez voisine de cette dernière quantité pour que l'équation numérique

$$f(x) = t_0$$

offre une racine x_0 intérieure à l'aire S_x (*loc. cit.*).

On aura ainsi $f(x_0) = t_0$ et par suite

$$\operatorname{mod} f(x_0) - \operatorname{mod} f(x^{(0)}) = \operatorname{mod} t_0 - \operatorname{mod} t^{(0)} > 0.$$

Appelant ensuite $\mathfrak{b}$ une quantité positive remplissant les conditions

$$(5) \qquad \mathfrak{b} \leqq \delta', \quad \mathfrak{b}(\Theta + \Phi\mathfrak{b}) < \operatorname{mod} f(x_0) - \operatorname{mod} f(x^{(0)}),$$

puis

$$(6) \qquad \mathfrak{g} > \mathfrak{g}'$$

deux autres quantités de ce genre, dont la première jouisse relativement à $\mathfrak{b}$ de la propriété mentionnée au lieu cité, nous tracerons dans le plan O_t servant à la notation graphique de la variable t un chemin indéfini

$$(7) \qquad t_0, \quad t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_i, \quad \ldots$$

sous les deux conditions

$$\operatorname{mod}(t_{i+1} - t_i) \leqq \mathfrak{g},$$

$$(8) \qquad \operatorname{mod} t_{i+1} - \operatorname{mod} t_i > \mathfrak{g}' \quad \text{(algébriquement)},$$

dont l'inégalité (6) assure évidemment la compatibilité.

D'après ce que nous avons vu, l'équation

$$(9) \qquad f(x) = t$$

offrira, pour les valeurs (7) attribuées successivement à t, des racines

$$(10) \qquad x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_i, \quad \ldots$$

pour lesquelles on aura

$$(11) \qquad \operatorname{mod}(x_{i+1} - x_i) < \mathfrak{b}$$

aussi longtemps que x_i ne sortira pas de S_x.

Mais on trouvera certainement pour l'indice i une valeur I telle, que x_0, x_1, …, x_I n'étant pas extérieures à cette aire, x_{I+1} tombe au dehors. Car si les termes de la suite (10) n'en sortaient jamais, et si l'on représentait par M la limite supérieure assignable à $\operatorname{mod} f(x)$ dans cette aire comme sur son contour (180*), par $\mathfrak{z}$ quelque entier supérieur à $M : \mathfrak{g}'$, les inégalités (8) conduiraient à

$$\operatorname{mod} f(x_{\mathfrak{z}}) = \operatorname{mod} t_{\mathfrak{z}} = \operatorname{mod} t_0 + (\operatorname{mod} t_1 - \operatorname{mod} t_0) + \ldots$$
$$+ (\operatorname{mod} t_{\mathfrak{z}} - \operatorname{mod} t_{\mathfrak{z}-1}) > \mathfrak{z}\mathfrak{g}' > M,$$

tandis que l'on a, au contraire, $\operatorname{mod} f(x_{\mathfrak{z}}) < M$, puisque $x_{\mathfrak{z}}$ est supposée non extérieure à S_x.

Comme enfin le point extérieur x_{I+1} n'est séparé du point intérieur x_I que par la distance $\operatorname{mod}(x_{I+1} - x_I)$, laquelle est $< \mathfrak{b}$ d'après les inégalités (11), on peut (cela même d'une infinité de manières) marquer sur le contour C lui-même quelque point X donnant aussi

$$\operatorname{mod}(X - x_I) < \operatorname{mod}(x_{I+1} - x_I) < \mathfrak{b}.$$

Cela posé, le point X remplit la condition voulue (4); car, à cause de l'inégalité précédente et de (5), on a

$$\operatorname{mod}[f(X) - f(x_I)] \leq \operatorname{mod}(X - x_I)[\Theta + \Phi \operatorname{mod}(X - x_I)] \qquad (121, I)$$
$$< \mathfrak{b}(\Theta + \Phi\mathfrak{b}) < \operatorname{mod} f(x_0) - \operatorname{mod} f(x^{(0)}),$$

d'où numériquement

$$\operatorname{mod} f(X) - \operatorname{mod} f(x_I) \leq \operatorname{mod}[f(X) - f(x_I)] < \operatorname{mod} f(x_0) - \operatorname{mod} f(x^{(0)}).$$

puis en définitive

$$\begin{aligned}&\operatorname{mod} f(\mathrm{X}) - \operatorname{mod} f(x^{(0)})\\&\quad= [\operatorname{mod} f(x_0) - \operatorname{mod} f(x^{(0)})] + [\operatorname{mod} f(x_1) - \operatorname{mod} f(x_0)] + \ldots\\&\qquad+ [\operatorname{mod} f(x_1) - \operatorname{mod} f(x_{1-1})] + [\operatorname{mod} f(\mathrm{X}) - \operatorname{mod} f(x_1)] > 0,\end{aligned}$$

parce que toutes les différences entre crochets, sauf la dernière, sont des quantités positives, et que la valeur numérique de celle-ci est inférieure à la première.

II. Supposant en second lieu que $f'(x)$ ne s'évanouisse pas pour $x = x^{(0)}$, mais s'annule pour quelques valeurs de x non extérieures à l'aire S_x, nous appellerons

(12) $$\ldots,\quad \mathfrak{b}^{(j)},\quad \ldots$$

ces zéros qui sont en nombre essentiellement limité (4**) et nous poserons

(13) $$\ldots,\quad f(\mathfrak{b}^{(j)}) = \mathfrak{a}^{(j)},\quad \ldots$$

De ces points (13) pris pour centres, nous décrirons dans le plan O_t des cercles

(14) $$\ldots,\quad [\mathfrak{a}^{(j)}],\quad \ldots$$

ayant un même rayon ρ assez petit pour qu'aucun ne contienne $t^{(0)}$, pour que chacun d'eux soit extérieur à tous les autres, et nous nommerons S'_t l'aire indéfinie (perforée mais connexe) que leur ablation laisse dans le plan O_t. Des points (12) pris pour centres nous décrirons, dans le plan O_x, des cercles

(15) $$\ldots,\quad [\mathfrak{b}^{(j)}],\quad \ldots$$

dont le rayon commun σ aura été choisi assez petit pour que les modules des différences

$$\ldots,\quad f(x) - \mathfrak{a}^{(j)} = f(x) - f(\mathfrak{b}^{(j)}),\quad \ldots$$

soient tous $< \rho$ quand ceux des différences $\ldots, (x - \mathfrak{b}^{(j)}) \ldots$, sont $\overline{\overline{<}}\, \sigma$, et nous nommerons S'_x, C', ce à quoi l'ablation de ces derniers cercles réduit l'aire S_x et son contour C.

Les aires S'_t, S'_x jouissent de toutes les propriétés relatives appartenant à la totalité du plan O_t et à l'aire S_x dans l'alinéa précédent; car la première contient $t^{(0)}$, la seconde $x^{(0)}$, et $f'(x)$

ne peut s'évanouir ni dans celle-ci, ni sur son contour. La détermination dans la première d'un point comme t_0, suivie du tracé d'un chemin analogue à (7) et des autres considérations du même alinéa, nous procurera donc sur C' un point X remplissant la condition voulue (4). Mais ce point X tombe certainement sur quelque partie du contour C' appartenant à C; car t restant extérieure aux cercles (14) pendant sa marche à l'intérieur de S'_t, x racine correspondante de l'équation (9) ne peut évidemment pénétrer dans les cercles (15) (dont on peut au surplus supposer la petitesse arbitraire), ni même atteindre leurs circonférences.

III. Supposons enfin $f'(x^{(0)}) = 0$.

1° Quand $f(x^{(0)}) = 0$, il suffira de prendre à l'intérieur de S_x un point quelconque $\mathrm{x}^{(0)}$ rendant à la fois $f(\mathrm{x}^{(0)}) \neq 0$, $f'(\mathrm{x}^{(0)}) \neq 0$, puis de chercher comme ci-dessus (II) un point X du contour C donnant $\operatorname{mod} f(\mathrm{X}) > \operatorname{mod} f(\mathrm{x}^{(0)})$, à plus forte raison $\operatorname{mod} f(\mathrm{X}) > 0 > \operatorname{mod} f(x^{(0)})$.

2° Quand $f(x^{(0)}) \neq 0$, la formule de Taylor donnera

$$f(x^{(0)} + h) = f(x^{(0)}) + a_\mu h^\mu + a_{\mu+1} h^{\mu+1} + \ldots,$$

où $\mu > 1$, $a_\mu \neq 0$; on prendra quelque racine H de l'équation

$$h^\mu = \frac{f(x^{(0)})}{a_\mu} \qquad (121, \text{III}),$$

et, en appelant l une quantité positive infiniment petite, on fera $h = \mathrm{H}\, l$, d'où

$$(16) \qquad f(x^{(0)} + \mathrm{H}\, l) = f(x^{(0)}) \{ 1 + l^\mu [1 + e(l)] \},$$

si l'on représente par $e(l)$ l'expression infiniment petite

$$\frac{a_{\mu+1}}{a_\mu} \mathrm{H}\, l + \frac{a_{\mu+2}}{a_\mu} \mathrm{H}^2 l^2 + \ldots.$$

Maintenant, on peut évidemment assigner à l une valeur $\mathrm{l}^{(0)} \neq 0$ telle, que la quantité $\mathrm{x}^{(0)} = x^{(0)} + \mathrm{H}\mathrm{l}^{(0)}$ soit intérieure à S_x, que l'on ait en outre

$$f'(\mathrm{x}^{(0)}) = f'(x^{(0)} + \mathrm{H}\mathrm{l}^{(0)}) \neq 0, \qquad \operatorname{mod} e(\mathrm{l}^{(0)}) < 1,$$

telle par suite que la relation (16) donne

$$\operatorname{mod} f(\mathrm{x}^{(0)}) > \operatorname{mod} f(x^{(0)}) \{ 1 + \mathrm{l}^{(0)\mu} [1 - \operatorname{mod} e(\mathrm{l}^{(0)})] \} > \operatorname{mod} f(x^{(0)}).$$

Cette valeur $x^{(0)}$ de x ayant été une fois obtenue, on poursuivra le raisonnement comme ci-dessus (1°).

123. Actuellement, nous pouvons passer au lemme de Cauchy (**182***) ou plutôt à la proposition du n° **130*** qui en est une forme tant soit peu différente et qui, elle-même, se déduit immédiatement de son cas le plus simple comportant la considération d'une seule variable (*loc. cit.*, III).

Dans la série entière

(17) $$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

admettant un rayon de convergence $R > 0$, *nommons* α_m *le module de* a_m *coefficient du terme général,* r *une quantité positive quelconque* $< R$, *et choisissons à volonté le terme* $a_p x^p$ *dont le module conserve la valeur invariable* $\alpha_p r^p$ *pour toutes celles de* x *ayant* r *pour module commun. Si la série contient un terme effectif d'indice* $\neq p$, *quelqu'une* X *de ces dernières valeurs de* x *procurera certainement l'inégalité*

(18) $$\operatorname{mod} f(X) > \alpha_p r^p.$$

I. *Pour* $p = 0$, *la chose est renfermée dans le théorème précédent* (**122**). Car $f(x)$ est alors une fonction olotrope sur et au dedans de la circonférence $[r]$ ayant $x = 0$ pour centre avec r pour rayon (**140***); elle ne dégénère pas en une constante; la valeur $x^{(0)} = 0$ est intérieure à cette aire et l'on y a

$$f(x^{(0)}) = f(0) = a_0.$$

Enfin en tout point de son contour on a $\operatorname{mod} x = r$.

II. *Pour* p *pair et* $= 2\varpi$, *elle est vraie si elle a été démontrée pour* $p \leqq \varpi$.

Considérons l'expression

(19) $$\begin{cases} F_0(x^2) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \\ \qquad = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ldots + a_{2\varpi} x^{2\varpi} + \ldots, \end{cases}$$

et supposons d'abord que les coefficients dont les indices sont $\neq 2\varpi$

soient tous nuls. On ne peut avoir

$$(20)\qquad \tfrac{1}{2}[f(-x)-f(x)] = a_1 x + a_3 x^3 + \ldots = 0$$

en tous les points de la circonférence $|r|$; car autrement cette différence, olotrope aussi, serait identiquement nulle (4**) d'où $a_1 = a_3 = \ldots = 0$ aussi (134*), et, contrairement à l'hypothèse, la série (17) ne contiendrait aucun terme effectif d'indice $\neq 2\varpi$. Attribuant donc à x quelque valeur $\mathcal{X}$ de module $= r$, n'annulant pas la somme de la série (20), c'est-à-dire pour laquelle on ait $f(\mathcal{X}) \neq f(-\mathcal{X})$, puis appelant X celle des deux quantités $\mathcal{X}$, $-\mathcal{X}$ qui donne $\operatorname{mod} f(X)$ non $< \operatorname{mod} f(-X)$, la relation (19) que nous supposons être

$$\tfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)] = a_{2\varpi} x^{2\varpi}$$

conduira évidemment à

$$\operatorname{mod} f(X) > \tfrac{1}{2}\operatorname{mod}[f(X)+f(-X)] > \alpha_{2\varpi} r^{2\varpi}.$$

Supposons enfin que les coefficients a_0, a_2, .., $a_{2\varpi-2}$, $a_{2\varpi+2}$, ... ne soient pas tous nuls. La série entière en t

$$F_0(t) = a_0 + a_2 t + a_4 t^2 + \ldots + a_{2\varpi} t^{\varpi} + \ldots$$

contiendra un terme effectif de degré $\neq \varpi$, et comme elle admet R^2 pour rayon de convergence, comme on a $r^2 < R^2$, comme l'exactitude du point en question est admise pour la valeur ϖ de l'exposant p, quelque valeur T de t, ayant r^2 pour module, donnera

$$\operatorname{mod} F_0(T) > \alpha_{2\varpi}(r^2)^{\varpi}.$$

En appelant enfin $\mathcal{X}$ une racine de l'équation

$$\mathcal{X}^2 = T \qquad (121, \text{III}),$$

on aura $(\operatorname{mod}\mathcal{X})^2 = \operatorname{mod} T = r^2$, d'où $\operatorname{mod}\mathcal{X} = r$, et de la relation (19) on tirera

$$\operatorname{mod}\tfrac{1}{2}[f(\mathcal{X})+f(-\mathcal{X})] = \operatorname{mod} F_0(T) > \alpha_{2\varpi} r^{2\varpi},$$

puis

$$\operatorname{mod} f(X) > \alpha_{2\varpi} r^{2\varpi},$$

où X représente celle des deux quantités $\mathcal{X}$, $-\mathcal{X}$, de module commun r, pour laquelle on a $\operatorname{mod} f(X)$ non $< \operatorname{mod} f(-X)$.

III. *Pour p impair et $= 2\varpi + 1$, elle est encore vraie sous la même hypothèse.* On s'en assure aussitôt en considérant l'expression

$$F_1(x) = \frac{1}{2}\,\frac{f(x) - f(-x)}{x} = a_1 + a_3 x^2 + \ldots + a_{2\varpi+1} x^{2\varpi} + \ldots.$$

et recommençant presque textuellement le raisonnement ci-dessus (II).

IV. *Elle est donc générale.* Car elle est vraie pour $p = 0$ (I) et, de là, elle s'étend à la valeur $1 = 2 \times 0 + 1$ de cet exposant (III), puis aux valeurs $2 = 2 \times 1$ (II), $3 = 2 \times 1 + 1$ (III), puis aux valeurs

$$4 = 2 \times 2, \qquad 5 = 2 \times 2 + 1, \qquad 6 = 2 \times 3, \qquad 7 = 2 \times 3 + 1,$$

puis aux valeurs 8, 9, ..., 14, 15, et ainsi de suite.

124. Une démonstration du lemme de Cauchy que j'estimerais parfaite consisterait à étendre à toute valeur de l'indice p celle qui nous a permis de traiter si directement le cas où $p = 0$; mais je n'y ai pas réussi. La précédente a néanmoins sur toutes les autres l'avantage de comporter, au lieu d'artifices détournés, une méthode bien nette pour calculer *effectivement* la quantité X figurant dans l'inégalité (18). En dehors des principes généraux, elle n'a pour appui spécial que la proposition du n° 122 dont on peut faire encore l'application suivante et celle du n° 126 (*inf.*).

Quand, au lieu d'avoir un caractère purement topographique, le contour C du n° 122 est formé par des arcs de lignes ne contenant aucun point singulier, on prouve facilement que $[\operatorname{mod} f(x)]^2$ est, sur chacun d'eux, une fonction olotrope de la variable auxiliaire au moyen de laquelle les coordonnées rectangulaires du point courant de cet arc peuvent être exprimées, puis, qu'on y peut assigner une valeur de x pour laquelle la valeur de ce module n'est inférieure à aucune de celles qu'il prend sur le reste du même arc. On est alors conduit à cette propriété intéressante des fonctions olotropes : *Sur le contour* C *il existe quelque point où la valeur de* $\operatorname{mod} f(x)$ *surpasse toutes celles pouvant être prises par lui à l'intérieur de l'aire que borde ce contour.*

Cette autre en résulte immédiatement : *quand* $f(x)$ *n'a aucun zéro dans l'aire* S_x, *il existe encore sur son contour quelque point où* mod $f(x)$ *est inférieur à toutes les valeurs qu'il peut prendre à l'intérieur de la même aire.* Car $1 : f(x)$ est alors olotrope dans l'aire considérée (250*, II), et, par ce qui précède, $1 : f(x)$ prend sa valeur maximum sur le contour lui-même.



ADDITION III.

SUR LA NON-NULLITÉ DU DÉTERMINANT DIFFÉRENTIEL PAR RAPPORT AUX CONSTANTES ARBITRAIRES, DES INTÉGRALES GÉNÉRALES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

125. Le point dont il s'agit a déjà été établi au n° 383*, mais son importance me semble donner de l'intérêt à une démonstration toute différente qui est beaucoup plus directe. Il suffira de l'exposer dans le cas où le système immédiat (et passif) à considérer, comportant seulement deux fonctions inconnues u, v d'une seule variable indépendante x, est la forme

$$(1) \qquad \frac{du}{dx} = U(x, u, v), \qquad \frac{dv}{dx} = V(x, u, v).$$

Nous représenterons toujours par

$$(2) \qquad S_x,$$

$$(3) \qquad S_u, \quad S_v$$

des aires où les seconds membres $U(x, u, v)$, $V(x, u, v)$ sont fonctions olotropes des quantités x, u, v considérées un instant comme trois variables indépendantes, par

$$(4) \qquad S_{\mathfrak{u}}, \quad S_{\mathfrak{v}}$$

des aires géométriquement superposables à (3), mais construites dans des plans $O_{\mathfrak{u}}$, $O_{\mathfrak{v}}$ servant à la notation graphique de deux nouvelles variables $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, par x_0 une valeur initiale invariable attribuée à x à l'intérieur de l'aire (2), par

$$\upsilon(x, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}), \quad \varphi(x, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}),$$

enfin, les intégrales ordinaires du système (1) que précisent les conditions initiales

$$(5) \qquad \upsilon(x_0, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = \mathfrak{u}, \qquad \varphi(x_0, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = \mathfrak{v}.$$

et qui sont fonctions olotropes des trois variables indépendantes x, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, aussi longtemps que celles-ci conservent des valeurs intérieures aux aires (2), (4), laissant en outre celles des intégrales elles-mêmes intérieures aux aires (3) (*loc. cit.*, I).

Cela posé, il s'agit de prouver que *la fonction*

$$(6)\qquad \Delta(x, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = \begin{vmatrix} \dfrac{d\upsilon}{d\mathfrak{u}} & \dfrac{d\upsilon}{d\mathfrak{v}} \\ \dfrac{d\varphi}{d\mathfrak{u}} & \dfrac{d\varphi}{d\mathfrak{v}} \end{vmatrix}$$

ne peut s'évanouir pour aucune combinaison des valeurs de x, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ *venant d'être définies.*

I. *Pour ces mêmes valeurs de* x, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, *et cela quel que soit l'indice* k, *on a l'identité*

$$(7)\qquad \frac{d^k\Delta}{dx^k} = \Omega_k\Delta,$$

où Ω_k *représente une fonction olotrope de ces trois variables.*

La différentiation par rapport à x de la relation de définition (6) donne

$$(8)\qquad \frac{d\Delta}{dx} = \begin{vmatrix} \dfrac{d^2\upsilon}{d\mathfrak{u}\,dx} & \dfrac{d^2\upsilon}{d\mathfrak{v}\,dx} \\ \dfrac{d\varphi}{d\mathfrak{u}} & \dfrac{d\varphi}{d\mathfrak{v}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{d\upsilon}{d\mathfrak{u}} & \dfrac{d\upsilon}{d\mathfrak{v}} \\ \dfrac{d^2\varphi}{d\mathfrak{u}\,dx} & \dfrac{d^2\varphi}{d\mathfrak{v}\,dx} \end{vmatrix} \qquad (258^*, \text{V});$$

celles de la première équation (1) exécutées par rapport à $\mathfrak{u}$ d'abord, à $\mathfrak{v}$ ensuite, après substitution de υ, φ à u, v, conduisent à

$$\frac{d^2\upsilon}{d\mathfrak{u}\,dx} = \mathrm{U}^{(0,1,0)}(x, \upsilon, \varphi)\frac{d\upsilon}{d\mathfrak{u}} + \mathrm{U}^{(0,0,1)}(x, \upsilon, \varphi)\frac{d\varphi}{d\mathfrak{u}},$$

$$\frac{d^2\upsilon}{d\mathfrak{v}\,dx} = \mathrm{U}^{(0,1,0)}(x, \upsilon, \varphi)\frac{d\upsilon}{d\mathfrak{v}} + \mathrm{U}^{(0,0,1)}(x, \upsilon, \varphi)\frac{d\varphi}{d\mathfrak{v}},$$

en remarquant que $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ n'entrent dans la fonction composée $\mathrm{U}(x, \upsilon, \varphi)$ que par l'intermédiaire des intégrales υ, φ. Pour le premier déterminant du second membre de la relation (8), il reste donc

$$\mathrm{U}^{(0,1,0)}(x, \upsilon, \varphi)\Delta;$$

pour le second déterminant, on trouve de la même manière

$$V^{(0,0,1)}(x, \upsilon, \varphi)\Delta,$$

ce qui ramène la relation considérée à

$$\frac{d\Delta}{dx} - U^{(0,1,0)}(x, \upsilon, \varphi)\Delta + V^{(0,0,1)}(x, \upsilon, \varphi)\Delta = \Omega_1\Delta,$$

c'est-à-dire à la forme voulue (7) pour $k = 1$.

En combinant maintenant cette formule avec le résultat de sa différentiation par rapport à x, il vient immédiatement

$$\frac{d^2\Delta}{dx^2} = \frac{d\Omega_1}{dx}\Delta + \Omega_1\frac{d\Delta}{dx} = \left[\frac{d\Omega_1}{dx} + \Omega_1^2\right]\Delta = \Omega_2\Delta,$$

puis en poursuivant les différentiations

$$\frac{d^3\Delta}{dx^3} = \frac{d\Omega_2}{dx}\Delta + \Omega_2\frac{d\Delta}{dx} = \left[\frac{d\Omega_2}{dx} + \Omega_1\Omega_2\right]\Delta = \Omega_3\Delta,$$

et ainsi de suite.

II. *On a*

$$\Delta(x_0, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = 1.$$

Car en différentiant les formules (5) par rapport à $\mathfrak{u}$, puis à $\mathfrak{v}$, on trouve immédiatement que, pour $x = x_0$, le déterminant (6) se réduit à

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

III. En appelant x_1 une valeur quelconque de x (renfermée dans les limites considérées), il est donc impossible que l'on ait $\Delta(x_1, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = 0$; car alors la relation (7) donnerait indéfiniment

$$\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)_{x=x_1} = \left(\frac{d^2\Delta}{dx^2}\right)_{x=x_1} = \ldots = \left(\frac{d^k\Delta}{dx^k}\right)_{x=x_1} = \ldots = (\Delta)_{x=x_1} = 0,$$

et en cheminant de x_1 à x_0 on ne pourrait manquer de trouver

$$\Delta(x_0, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = 0 \qquad (176^*),$$

conclusion dont nous venons de constater la fausseté (II).



ADDITION IV.

SUR LA POSSIBILITÉ DE FAIRE CROITRE SANS LIMITE LE MODULE D'UNE FONCTION INDÉFINIMENT OLOTROPE.

126. Ce point capital de la théorie des fonctions d'une seule variable a été rapporté au n° 8** avec la démonstration habituelle reposant sur le lemme de Cauchy, conçu sous la forme du n° 130*, et, en outre, sur la convergence illimitée de la série de Taylor appliquée au développement d'une fonction indéfiniment olotrope (206*). Mais il est facile aussi de le rattacher seulement aux considérations des n°s 119 et 121, II, qui sont directes et au fond infiniment plus simples. A raisonner ainsi, on trouve cet autre avantage de constater qu'on peut rendre la fonction infinie en faisant suivre à la variable un chemin dont les côtés sont aussi petits qu'on le veut, chose pouvant être utile à connaître, mais que l'autre méthode laissait absolument ignorer.

Si la fonction $f(x)$ est olotrope en $x = 0$ et ne dégénère pas en une constante, son développement par la formule de Maclaurin

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$$

contient forcément quelque terme $a_\mu x^\mu$ dont le degré μ est $\geqq 1$ dont le coefficient a_μ est $\neq 0$ (191*); si, en outre, elle est indéfiniment olotrope, les points suivants peuvent être successivement établis.

I. En posant

$$(2) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{\mu-1} x^{\mu-1} + x^\mu \varphi(x),$$

la fonction $\varphi(x)$ est indéfiniment olotrope aussi.

Dans le plan servant à la notation graphique de x, délimitons une aire S_x contenant l'origine $x = 0$ et dont tout autre point soit

de celui-ci à une distance restant toujours inférieure à l'olomètre de $f(x)$ en $x=0$. A l'intérieur de S_x, la fonction $\varphi(x)$ est olotrope parce que l'identité (1) y est valable et que sa combinaison avec (2) donne évidemment

$$(3) \qquad \varphi(x) = a_\mu + a_{\mu+1}x + a_{\mu+2}x^2 + \ldots.$$

A l'extérieur de S_x, la même fonction est encore olotrope parce qu'on peut écrire

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - (a_0 + a_1 x + \ldots + a_{\mu-1} x^{\mu-1})}{x^\mu},$$

quotient de deux fonctions indéfiniment olotropes, dont la seconde ne s'évanouit jamais dans l'espace considéré (250*, III).

II. *On peut assigner quelque valeur infinie de x, pour laquelle on ait sans cesse*

$$\operatorname{mod}\varphi(x) \geqq \operatorname{mod} a_\mu.$$

Pour cela, il suffit effectivement de tracer de l'origine prise pour centre commun, avec des rayons

$$R_1, \quad R_2, \quad \ldots, \quad R_N, \quad \ldots,$$

croissant sans cesse et indéfiniment, des circonférences sur lesquelles respectivement, on déterminera des valeurs de x,

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_N, \quad \ldots,$$

sous la condition indéfinie

$$\operatorname{mod}\varphi(x_N) \geqq \operatorname{mod}\varphi(0) \qquad (122)$$

(ici nous devons ne pas écarter l'hypothèse de l'égalité, parce que $\varphi(x)$ peut dégénérer en une constante). Car $\operatorname{mod} x_N = R_N$ est alors une quantité infinie, et l'inégalité précédente équivaut à $\operatorname{mod}\varphi(x_N) \geqq \operatorname{mod} a_\mu$, à cause de la relation (3) donnant $\varphi(0) = a_\mu$.

III. *Pour les valeurs infinies de x déterminées ci-dessus* (II), *$f(x)$ est infinie.*

Car l'identité (2) peut être écrite

$$f(x) = x^{\mu}\left[\frac{a_0}{x^{\mu}} + \frac{a_1}{x^{\mu-1}} + \ldots + \frac{a_{\mu-1}}{x} + \varphi(x)\right],$$

et le second nombre est un produit dont le premier facteur est infini, tandis que le module du second finit évidemment par se maintenir au-dessus de toute quantité positive inférieure à $\operatorname{mod} a_{\mu} \neq 0$.



ADDITION V.

SUR UN CAS ÉTENDU DANS LEQUEL L'INTERPOLATION PERMET DE REPRÉSENTER UNE FONCTION AVEC UNE APPROXIMATION INDÉFINIE.

127. Les égalités numériques réalisées au n° 62**, pour les valeurs de x y formant la suite (11), entre la fonction $\varphi(x)$ et le polynôme entier $\varphi_n(x)$ fourni par la formule d'interpolation finale, entraînent évidemment entre ces deux fonctions, pour d'autres valeurs de x si elles sont suffisamment voisines des précédentes, une certaine concordance qui est plus ou moins marquée suivant les circonstances. En outre, il n'est pas déraisonnable de penser qu'on rend cette concordance de plus en plus étroite pour toutes valeurs de x tombant dans l'aire S, en y prenant ces quantités (11) de plus en plus nombreuses et rapprochées, que même on peut ainsi amener le module de l'écart $\varphi(x) - \varphi_n(x)$ à se maintenir au-dessous de toute quantité positive donnée; d'où la possibilité éventuelle de simplifier les calculs numériques, tout en leur laissant une précision suffisante, par la substitution du polynôme $\varphi_n(x)$ à la fonction $\varphi(x)$ qui, habituellement, est infiniment moins maniable.

Mais, nonobstant la confiance qui, à cet égard, a toujours dominé la pratique, ce n'est là qu'une présomption des plus vagues, et même l'événement peut la démentir d'une manière absolue (130, *inf.*). Il n'est donc pas inutile de consigner ici le théorème suivant (129, *inf.*) qui détermine un cas assez vaste où le succès de l'interpolation est certain.

128. Voici d'abord une formule très simple dont j'aurai besoin.

En conservant les notations du n° 62**, *on a la relation*

$$\varphi(x) - \varphi_n(x) = \omega(x) \mathcal{E}_t \left(\frac{\varphi(t)}{\omega(t)(t-x)} \right), \tag{1}$$

où le résidu doit être étendu à

$$(2) \qquad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n,$$

et x, totalité des infinis possédés dans l'aire S par la fonction placée sous le signe $\mathcal{E}$.

C'est ce que montre immédiatement la décomposition évidente du second membre en

$$\omega(x) \mathcal{E}_t \left(\frac{\varphi(t)}{\omega(t)}\right) \frac{1}{t-x} = -\varphi_n(x) \qquad (\textit{loc. cit.}),$$

et en

$$\omega(x) \mathcal{E}_{t=x} \frac{\varphi(t)}{\omega(t)} \left(\frac{1}{t-x}\right) = \omega(x) \frac{\varphi(x)}{\omega(x)} = \varphi(x).$$

129. *Soient (x_0, r), $(x_0, \mathfrak{r})$ deux circonférences décrites du même point x_0 pris pour centre avec des rayons quelconques r, $\mathfrak{r}$, et supposons que la valeur de x soit assujettie à ne pas sortir de la première, que les quantités (2) tombent toutes dans la seconde, puis enfin que $\varphi(x)$ soit olotrope à l'intérieur de la plus grande des deux. Pour que sous ces seules conditions le polynôme $\varphi_n(x)$ puisse représenter $\varphi(x)$ avec une approximation aussi grande qu'on le veut, ou bien, ce qui revient au même, pour que la différence (1) tende toujours vers zéro quand n augmente indéfiniment, il faut et il suffit que la fonction considérée $\varphi(x)$ soit encore olotrope dans quelque circonférence de même centre x_0, mais de rayon supérieur à $r + 2\mathfrak{r}$.*

Nous simplifierons sensiblement l'écriture en supposant $x_0 = 0$, hypothèse à laquelle toute autre se ramènerait immédiatement par les substitutions

$$x = x_0 + 'x, \qquad x_1 = x_0 + 'x_1, \qquad \ldots.$$

I. Si l'on attribue à toutes les quantités (2) une même valeur $\mathfrak{r}$ prise arbitrairement dans l'intérieur de la seconde circonférence, le polynôme $\varphi_n(x)$ n'est évidemment plus autre chose que l'ensemble des n premiers termes du développement de $\varphi(\mathfrak{r} + \overline{x - \mathfrak{r}})$ par la série de Taylor; et, comme la différence $\varphi(x) - \varphi_n(x)$ doit

tendre vers zéro pour n infini, cette série construite à partir de toute valeur $\mathfrak{r}$ de x, tombant dans la deuxième circonférence, doit être convergente pour toute valeur de x intérieure à la première. En d'autres termes (139*), la fonction $\varphi(x)$ doit être olotrope dans la deuxième circonférence avec un olomètre au moins égal à $r+\mathfrak{r}$, distance possible de deux points intérieurs à l'une et à l'autre respectivement, et, par suite (142*), dans cette même deuxième circonférence accrue d'une zone additionnelle d'épaisseur $r+\mathfrak{r}$, c'est-à-dire à l'intérieur d'une circonférence concentrique de rayon $r+2\mathfrak{r}$. La condition posée est donc nécessaire.

II. Pour prouver qu'elle est suffisante, nous écrirons

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m+\ldots$$

le développement de la fonction proposée par la formule de Taylor à partir de $x=x_0(=0)$, c'est-à-dire ici par la formule de Maclaurin, et cette série admet certainement un rayon de convergence qui surpasse $r+2\mathfrak{r}$, puisque, par hypothèse, $\varphi(x)$ est olotrope dans la circonférence qui a $x_0(=0)$ pour centre avec un rayon supérieur à $r+2\mathfrak{r}$ (201*). Nous nommerons ensuite R une quantité positive comprise entre $r+2\mathfrak{r}$ et quelque rayon de convergence de la série surpassant cette dernière quantité, puis M la limite supérieure que l'on peut assigner à $\operatorname{mod}\varphi(x)$ sur la circonférence de rayon R, concentrique à celles que nous avons considérées déjà (117*).

Cela posé, nous considérerons la série

$$\sum_k{}_0^\infty a_{n+k}X_k, \tag{3}$$

où X_k représente la somme de tous les monômes entiers dissemblables en $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de degré commun k et de coefficients tous $=1$. En appelant $\alpha_m, \xi, \xi_1, \ldots, \xi_n$ les modules de $a_m, x, x_1, \ldots, x_n$, on a

$$\alpha_m<\frac{M}{R^m}\qquad(131^*),$$

en vertu de quoi la somme des modules des termes élémentaires

de $a_{n+k}X_k$ est inférieure à

$$(4)\qquad \frac{M}{R^n}\Xi_k,$$

Ξ_k désignant ce que devient X_k quand, à $x, x_1, \ldots, x_n$, on y substitue

$$(5)\qquad \frac{\xi}{R},\quad \frac{\xi_1}{R},\quad \ldots,\quad \frac{\xi_n}{R}$$

respectivement.

Or les quantités positives (5) étant toutes < 1, la série qui a l'expression (4) pour terme général est évidemment convergente, avec

$$\frac{M}{R^n}\frac{1}{\left(1-\frac{\xi}{R}\right)\left(1-\frac{\xi_1}{R}\right)\cdots\left(1-\frac{\xi_n}{R}\right)}=\frac{MR}{(R-\xi)(R-\xi_1)\ldots(R-\xi_n)}$$

pour somme.

On en conclut (107*) que la série entière en $x, x_1, \ldots, x_n$ formée par les termes élémentaires des polynômes $a_n X_0 (= a_n)$, $a_{n+1}X_1[= a_{n+1}(x+x_1+x_2+\ldots+x_n)]$, $a_{n+2}X_2, \ldots$ est convergente, par suite que la série (3) l'est aussi; et ces deux séries ont une même somme

$$\Phi(x, x_1, \ldots, x_n)$$

donnant les inégalités

$$(6)\qquad \begin{cases} \operatorname{mod}\Phi(x, x_1, \ldots, x_n) < \dfrac{MR}{(R-\xi)(R-\xi_1)\ldots(R-\xi_n)} \\ \qquad\qquad < \dfrac{MR}{(R-r)(R-\mathfrak{r})^n}, \end{cases}$$

cette dernière ayant lieu *a fortiori* à cause des hypothèses de rigueur

$$(7)\qquad \xi \leqq r;\qquad \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n \leqq \mathfrak{r}.$$

Observons actuellement qu'en vertu du théorème du n° 63** la somme des $k+1$ premiers termes de la série (3) est précisément ce que devient le résidu de la formule (1) quand on y substitue à $\varphi(t)$ la somme des $n+k+1$ premiers termes du développement de cette fonction par la série de Maclaurin. Le résidu en question est donc égal à la somme $\Phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ de cette

série, ce qui rend la relation (1) équivalente à

$$(8) \qquad \varphi(x) - \varphi_n(x) = \omega(x)\Phi(x, x_1, \ldots, x_n).$$

Comme $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$, les inégalités (7) donnent celle-ci

$$\text{mod}\,\omega(x) \leqq (r + \mathfrak{r})^n,$$

dont la combinaison avec l'identité (1) et l'inégalité (6) conduit finalement à

$$(9) \qquad \text{mod}[\varphi(x) - \varphi_n(x)] < \frac{\text{MR}}{\text{R} - r}\left(\frac{r + \mathfrak{r}}{\text{R} - \mathfrak{r}}\right)^n.$$

L'hypothèse admise $\text{R} > r + 2\mathfrak{r}$ équivaut à

$$\frac{r + \mathfrak{r}}{\text{R} - \mathfrak{r}} < 1;$$

il en résulte immédiatement, comme il fallait le constater, que $\left(\frac{r + \mathfrak{r}}{\text{R} - \mathfrak{r}}\right)^n$, $\text{mod}[\varphi(x) - \varphi_n(x)]$ à plus forte raison d'après la formule (9), sont des quantités infiniment petites quand on fait croître indéfiniment l'entier n, nombre des valeurs particulières (2) de x qui ont été choisies pour exécuter l'interpolation.

130. Si les conditions sous lesquelles le théorème précédent a été énoncé ne sont pas toutes remplies, l'interpolation peut conduire à un résultat illusoire; ceci peut paraître paradoxal, mais le cas traité ci-après n'en fournit pas moins un exemple.

Nous ferons

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2 - 1},$$

et, représentant par

$$(10) \qquad \xi'_1, \quad \xi'_2, \quad \ldots, \quad \xi'_{\nu'},$$

$$(11) \qquad \xi''_1, \quad \xi''_2, \quad \ldots, \quad \xi''_{\nu''}$$

deux groupes de quantités réelles, toutes comprises entre 0 et $+1$ *exclusivement*, nous prendrons $n = 2\nu' + 2\nu''$ et les termes

$$(12) \qquad \pm\xi'_1, \quad \ldots, \quad \pm\xi'_{\nu'}, \quad \pm\xi''_1, \quad \ldots, \quad \pm\xi''_{\nu''},$$

pour composer la suite (2). Il en résulte

$$\omega(x) = (x^2 - \xi_1'^2)\dots(x^2 - \xi_{\nu'}'^2)(x^2 - \xi_1''^2)\dots(x^2 - \xi_{\nu''}''^2),$$

puis, pour l'hypothèse numérique particulière $x = 0$ (128),

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(0) - \varphi_n(0) = (-1)^{\nu'+\nu''}\xi_1'^2\dots\xi_{\nu'}'^2\,\xi_1''^2\dots\xi_{\nu''}''^2 \\ &\qquad\qquad \times \mathcal{E}\,\frac{1}{((t^2-1))(t^2-\xi_1'^2)\dots(t^2-\xi_{\nu'}'^2)(t^2-\xi_1''^2)\dots(t^2-\xi_{\nu''}''^2)\,t}. \end{aligned} \right.$$

Le résidu doit s'étendre aux infinis (12) et $t = 0$ seulement de la fraction rationnelle en t, placée sous le signe $\mathcal{E}$, à l'exclusion des infinis $t = \pm 1$. Pour le calculer facilement, nous observerons que le résidu *intégral* de cette fraction rationnelle se réduit à zéro (63**), et qu'ainsi le résidu cherché est égal au produit de -1 par la somme des résidus partiels relatifs à ces deux seuls infinis $t = \pm 1$, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{(1-\xi_1'^2)\dots(1-\xi_{\nu'}'^2)(1-\xi_1''^2)\dots(1-\xi_{\nu''}''^2)}.$$

La formule (13) devient donc

$$\varphi(0) - \varphi_n(0) = (-1)^{\nu'+\nu''+1}\left\{\left[\frac{\xi_1'^2}{1-\xi_1'^2}\cdots\frac{\xi_{\nu'}'^2}{1-\xi_{\nu'}'^2}\right]\left[\frac{\xi_1''^2}{1-\xi_1''^2}\cdots\frac{\xi_{\nu''}''^2}{1-\xi_{\nu''}''^2}\right]\right\},$$

et conduit, en valeur numérique, à l'inégalité

$$(14)\qquad \varphi(0) - \varphi_n(0) > 2^{\nu''}\,\frac{\xi_1'^2}{1-\xi_1'^2}\cdots\frac{\xi_{\nu'}'^2}{1-\xi_{\nu'}'^2},$$

quand on assujettit chacune des quantités (11) à la condition

$$\xi > \sqrt{\frac{2}{3}},$$

donnant évidemment

$$\frac{\xi^2}{1-\xi^2} > 2.$$

Si donc on multiplie et resserre arbitrairement les quantités (10) à l'intérieur de l'intervalle [0, 1], on n'en pourra pas moins prendre ensuite ν'' assez grand pour empêcher le second membre de l'inégalité (14) de tendre vers zéro, le premier à plus forte

raison, et même pour les rendre tous deux infinis. De cette manière, les valeurs (12) prises pour éléments de l'interpolation seront aussi nombreuses, aussi rapprochées qu'on le voudra dans l'intervalle $[-1, +1]$: jamais pour $x = 0$, valeur de la variable la plus centrale relativement à leur ensemble, la valeur du polynôme $\varphi_n(x)$ n'aura pour limite la valeur correspondante de la fonction considérée $\varphi(x)$.

FIN DE LA TROISIÈME PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES
DE LA TROISIÈME PARTIE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA TROISIÈME PARTIE.

23191 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.